

УДК 517.968.72

ПРИЗНАКИ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Д. С. Джумабаев*, Э. А. Бакирова

* dzhumabaev@list.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Одним из основных методов исследования интегро-дифференциальных уравнений является метод Некрасова [1], где с помощью фундаментальной системы решений соответствующего однородного дифференциального уравнения и ядра интегрального члена строится вспомогательное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Предполагая, что это интегральное уравнение однозначно разрешимо, решение краевой задачи сводится к нахождению решения системы алгебраических уравнений, определяемых по краевым условиям, фундаментальной матрице и резольвенте построенного уравнения.

Другим часто применяемым методом исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений является метод функций Грина. В этом методе предполагается однозначная разрешимость краевой задачи для соответствующего дифференциального уравнения и исходная краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром, составляемым через функцию Грина и ядра интегрального члена исходного интегро-дифференциального уравнения. Однако эти методы дают лишь достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В сообщении рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $K(t, s)$ непрерывна на $[0, T] \times [0, T]$, $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$.

Возьмем $h > 0$: $mh = T$ и задачу (1), (2) аппроксимируем двухточечной краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{i=1}^m \int_{(i-1)h}^{ih} K(t,s)ds y[(i-1)h] + f(t), \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n, \quad (3)$$

$$By(0) + Cy(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (4)$$

Применяя к задаче (3), (4) метод параметризации [2], получим систему уравнений относительно параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)' \in R^{nm}$

$$B\lambda_1 + C \left[I + D_{\nu m}(h) \right] \lambda_m + C \sum_{i=1}^m H_{\nu m}^i(h) \lambda_i = b_1, \quad (5)$$

$$\left[I + D_{\nu s}(h) \right] \lambda_s + \sum_{i=1}^m H_{\nu s}^i(h) \lambda_i - \lambda_{s+1} = b_{s+1}, \quad s = \overline{1, m-1}, \quad (6)$$

где

$$D_{\nu r}(h) = \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu} \dots d\tau_1,$$

$$H_{\nu r}^i(h) = \int_{(r-1)h}^{rh} K_i(\tau_1) d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} K_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$\int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} K_i(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu} d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, m},$$

Матрицу, соответствующую левой части систем линейных уравнений (5), (6), обозначим через $Q_{\nu}(h)$.

Теорема 1. Пусть при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_{\nu}(h) : R^{nm} \rightarrow R^{nm}$ обратима и выполняются неравенства

$$a) \| [Q_{\nu}(h)]^{-1} \| \leq \gamma_{\nu}(h),$$

$$b) q_{\nu}(h) = \gamma_{\nu}(h) \max(1, h\|C\|) \left\{ e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^j}{j!} + m\beta h \left(e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right) \right\} < 1,$$

где $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$, $\beta = \max_{(t, s) \in [0, T] \times [0, T]} \|K(t, s)\|$. Тогда краевая задача (3), (4) имеет единственное решение $y(t)$ и справедлива оценка

$$\|y\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\| \leq M_{\nu}(h) \max(\|f\|_1, \|d\|),$$

где

$$M_{\nu}(h) = \left\{ \gamma_{\nu}(h) \left(e^{\alpha h} - 1 + e^{\alpha h} m\beta h \right) \max \left(1 + h\|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right) + e^{\alpha h} \right\} h \times$$

$$\left\{ \gamma_{\nu}(h) \left(e^{\alpha h} + e^{\alpha h} m\beta h \right) \max \left(1, h\|C\| \right) \frac{1}{1 - q_{\nu}(h)} \frac{(\alpha h)^{\nu}}{\nu!} + 1 \right\} +$$

$$\gamma_{\nu}(h) \max \left[1 + h\|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] h.$$

Теорема 2. Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существуют числа $h > 0$: $mh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$, при которых матрица $Q_{\nu}(h)$ обратима и вместе с неравенствами а), б) теоремы 1 имеет место

$$\delta_{\nu l}(h) = \frac{1}{2} \left[(\alpha + \beta T) M_{\nu l}(h) + 1 \right] \beta T h < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов А. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 190. С. 1–25.
2. Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.