

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© Т. Д. Джураев, Б. И. Жамолов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Пусть $D = D_1 \cup J \cup D_2$, где $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x, y) : -y < x < y + 1, -\frac{1}{2} < y < 0\}$, $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $h \in R$. В области D рассмотрим уравнения

$$(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} + c) Lu = 0, \quad (1)$$

$$\left(a \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) Lu = 0, \quad (2)$$

где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$,

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) непрерывна в $\overline{D}$;
- 2) является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;
- 3) удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u_{xx}(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

где n — внутренняя нормаль, φ_i, ψ_i ($i = \overline{1, 4}$) — заданные функции, причём $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1(0 \leq y \leq h)$, $\varphi_3(y), \varphi_4(y) \in C(0 \leq y \leq h)$, $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, $\psi_3(x) \in C^1(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$;

- 4) выполняются условия склеивания

$$u(x, -0) = u(x, +0),$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0).$$

ЗАДАЧА 2. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$;

- 2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;
- 3) частные производные по y первого, второго и третьего порядков функции $u(x, y)$ непрерывны в области D ;
- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{AC} = \psi_4(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{BC} = \psi_5(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ — заданные функции, причём $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^3(0 \leq y \leq h)$, $\psi_1(x) \in C^3(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, $\psi_2(x) \in C^2(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, $\psi_4(x) \in C^1(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$, $\psi_3(x) \in C^2(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$, $\psi_5(x) \in C^1(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$, $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$.

В работе получены явные решения задач 1 и 2.

Если в задаче 1 условия (3) и (4) заменить условиями

$$u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

то решение задачи 1 в этом случае сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
2. Джураев Т. Д., Мамажанов М. Об одном классе краевых задач для уравнения высокого порядка с парабола-гиперболическим оператором // УзМЖ. 1995. № 4. С. 35–41.
3. Жамолов Б. И. Краевые задачи для уравнения парабола-гиперболического типа четвертого порядка // УзМЖ. 2006. № 4. С. 11–25.