Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 132–133

УДК 517.956.3

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Т. Д. Джураев, О. С. Зикиров

mathinst@uzsci.net, zikirov@yandex.ru

Институт математики им. В. И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В настоящее время нелокальные задачи с интегральными условиями весьма активно исследуются (см., например, [1–4]), но при этом в основном рассматриваются уравнения второго порядка, как в одномерных [1, 2], так и в многомерных [3] областях. Следует отметить, что задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных высокого, в частности, третьего порядка еще мало исследованы.

В данной работе рассматривается нелокальная задача с интегральными граничными условиями для одного уравнения в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < l, \quad 0 < y < h\}$ исследуется классическая разрешимость следующей ЗАДАЧИ: найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad \int\limits_0^h u(x,y)dy = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad \int\limits_0^l u(x,y)dx = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

где α, β — заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i = 1,2)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяюшее условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \int\limits_0^h \varphi_1(y)dy = \psi_2(0),$$

$$\int\limits_0^l \psi_1(x)dx = \varphi_2(0), \quad \int\limits_0^l \psi_2(x)dx = \int\limits_0^h \varphi_2(y)dy.$$

Очевидно, что прямые $x = const$, $y = const$ являются характеристиками уравнения (1) и граничные условия задаются в интегральном виде, поэтому задачу (1)–(3) будем называть интегральной задачей Гурса.

Под *классическим решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C^2(\overline{D})\bigcap C^3(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3).

В работе доказывается существование и единственность классического решения нелокальной задачи (1)–(3).

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\alpha = \beta > 0$ *и коэффициент* $c(x, y)$ *уравнения (1) ограничен вместе со своими производными и удовлетворяет условиям*

$$c(x, y) \in C^2(D), \quad c_{xy} \leq 0, \quad c_x c_y - c^2 \geq 0 \quad \textit{в области} D.$$

Пусть выполнены условия

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x) \in C^2[0, l], \quad \varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C^2[0, h].$$

Тогда задача (1)–(3) имеет не более одного классического решения в области D *.*

Отметим, что рассмотренная задача с интегральными условиями может быть изучена для общего линейного уравнения в частных производных третьего порядка вида

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = f(x, y), \tag{4}$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c\,(x, y)u_{yy} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (4) являются заданными действительными функциями в области D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пулькина Л. С.* // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
2. *Пулькина Л. С.* // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 3. С. 435–445.
3. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
4. *Кожанов А.И.* // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.