

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

© Т. Д. Джураев, А. Г. Ходжаниязов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В последние годы возрос интерес к изучению спектральных задач для неклассических уравнений математической физики (см., например, [1–3]).

В работе [4] впервые были поставлены и исследованы спектральные краевые задачи для уравнений составного типа третьего и четвертого порядков: в частности, были вычислены собственные значения и собственные функции ряда краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} + u_{yy}) + \lambda u = 0.$$

В настоящем сообщении речь идёт об одной новой спектральной краевой задаче для уравнения

$$u_{xxx} + \operatorname{sign} y u_{yyy} + \lambda u = 0, \quad (1)$$

которое как при $y > 0$, так и при $y < 0$ является уравнением составного типа (см. [5]).

ЗАДАЧА. В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, -q < y < q\}$ найти собственные значения и собственные функции уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям:

$$u|_{\partial D} = 0, \quad u_x(0, y) = 0, \quad u_y(x, -q) = 0,$$

а также условиям склеивания:

$$u(x, -0) u(x, +0), \quad u_y(x, -0) = u_y(x, +0), \quad u_{yy}(x, -0) = u_{yy}(x, +0).$$

Для поставленной задачи найдены собственные значения, которые являются корнями уравнений

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}ap\right) = \frac{1}{2}e^{3ap}, \quad a < 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}bq\right) = \frac{1}{2}e^{3bq}, \quad b < 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}bq\right) = \frac{1}{2}e^{-3bq}, \quad b > 0,$$

где $a = \frac{\sqrt[3]{-\mu}}{2}$, $b = \frac{\sqrt[3]{-\nu}}{2}$.

Собственные функции задачи имеют вид

$$u_{kl}(x, y) = X_k(x) Y_l(y) = X_k(x) \begin{cases} Y_{1l}(y), & y > 0, \\ Y_{2l}(y), & y < 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$X_k(x) = e^{2a_k x} - \left(\cos \sqrt{3}a_k x + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}a_k x \right) e^{-a_k x},$$

$$Y_{1l}(y) = M_1 e^{2b_l y} + \left(N_1 \cos \sqrt{3}b_l y + Q_1 \sin \sqrt{3}b_l y \right) e^{-b_l y}, \quad y > 0,$$

$$Y_{2l}(y) = M_2 e^{-2b_l y} + \left(N_2 \cos \sqrt{3} b_l y + Q_2 \sin \sqrt{3} b_l y \right) e^{b_l y}, \quad y < 0,$$

здесь

$$M_1 = e^{-3b_l q} + 2\sqrt{3} \sin \sqrt{3} b_l q + 2 \cos \sqrt{3} b_l q, \quad M_2 = 3e^{-3b_l q},$$

$$N_1 = 2e^{-3b_l q} + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} b_l q - 5 \cos \sqrt{3} b_l q, \quad N_2 = 3 \left(\sqrt{3} \sin \sqrt{3} b_l q - \cos \sqrt{3} b_l q \right),$$

$$Q_1 = -2\sqrt{3}e^{-3b_l q} + 3 \sin \sqrt{3} b_l q - \sqrt{3} \cos \sqrt{3} b_l q, \quad Q_2 = 3 \left(\sqrt{3} \cos \sqrt{3} b_l q + \sin \sqrt{3} b_l q \right).$$

Доказано, что $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Разложение по фундаментальным функциям самосопряженных эллиптических операторов. М.: изд. МГУ, 1988.
2. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: изд. МГУ, 1988.
3. Кальменов Т. Ш. Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1.
4. Джурев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А. Вычисление собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 24–36.
5. Джурев Т. Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.