

УДК 517.955.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТОНКОГО НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ

© А. А. Егорова

alena.egorova@gmail.com

Научно исследовательский институт математики при ЯГУ, Якутск

В работе строится полное асимптотическое разложение трехмерной задачи линейной теории вязкоупругости в тонком неоднородном стержне, закрепленном с одного конца и испытывающем действие распределенных по торцу сил на другом конце. Усреднение проводится по методу Н. С. Бахвалова [1]. Рассматривается область типа тонкого стержня $x \in C_\varepsilon = (0, T) \times \beta_\varepsilon$, $t > 0$, $\beta_\varepsilon = \{x' = (x_2, x_3) | x'/\varepsilon \in \beta\}$, β — двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, и строится асимптотическое по $\varepsilon > 0$ разложение решения системы уравнений:

$$-\rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(A_{mj}^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(A_{mj}^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \right) = 0,$$

где A_{mj}^0, A_{mj}^1 — некоторые матрицы-функции, удовлетворяющие естественным условиям типа эллиптичности соответствующих дифференциальных операторов. Коэффициенты системы уравнений — гладкие функции всюду в C_ε , за исключением некоторого набора поверхностей, где они разрывны, и на которых решение удовлетворяет естественным условиям сопряжения. Граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &\equiv n_m \left(A_{mj}^0(x/\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_{mj}^1(x/\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \right) |_{(0,T) \times \partial \beta_\varepsilon} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &\equiv n_m \left(A_{mj}^0(x/\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_{mj}^1(x/\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} \right) |_{x_1=T} = f_\varepsilon(t, x) |_{x_1=T}, \\ u|_{x_1=0} &= 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Показано, что коэффициенты асимптотических разложений решения находятся из вспомогательных задач упругости [2] и задач составного типа [3] на “ячейке периодичности”, а также из задач на функции типа “пограничного слоя”, которые описывают поведение стержня в окрестности точки закрепления и точки приложения сил. Выведены усредненные уравнения для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня (на функции, зависящие только от одного пространственного переменного). При наличии дополнительных условий симметрии (см. [4]) система уравнений, описывающая усредненную модель, распадается на уравнения 2-го порядка для продольных и 4-го порядка для поперечных смещений. Показано, что эти уравнения содержат интегральные члены типа свертки, доказана теорема о близости решений для усредненной и исходной задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах М.: Наука, 1984.
2. Козлова М. В., Панасенко Г. П. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне // Выч. мат. и мат. физ. 1991. Т. 31, № 10.
3. Кожанов А. И. К теории уравнений составного типа: Автореферат диссертации доктора физико-математических наук: 01.01.02. Новосибирск, 1993. 26 с.
4. Panasenکو G. P. Asymptotic analysis of bar systems I // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2, № 3. P. 325–352.