

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

© И. П. Егорова, Н. А. Куликова *

* kulikovana@mail.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} = 0, & y > 0, 0 < m < 1, \\ u_{xy} - \frac{q}{x+y}(u_x + u_y) = 0, & y < 0, -1 < 2q < 0 \end{cases}$$

на множестве D , ограниченном прямыми $x + y = 0$, $x = 1$ и гладкой кривой

$$\Gamma \equiv \Gamma_0 : (x_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m} = \frac{1}{4}.$$

Пусть $D_+ = D \cap (y > 0)$, $D_- = D \cap (y < 0)$. Для уравнения $L(u)$ доказывается единственность решения задачи в следующей постановке.

ЗАДАЧА V . Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+), u(x, y) \in C^1(D_-), u_{xy} \in C(D_-);$$

$$L(u) \equiv 0, (x, y) \in D_+ \cup D_-;$$

$u(x, y)$ подчиняется краевым условиям

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma,$$

$$u(1, y)|_{x=1} = \psi(y), y \in [-1, 0];$$

$u(x, y)$ подчиняется условию сопряжения

$$\nu_+(x) = \nu_-(x), x \in (0, 1),$$

при этом

$$\nu_+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y), x \in (0, 1),$$

$$\nu_-(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_x^1 (t-x)^{-r_1} u_1(t, 0) dt + \int_x^1 (t-x)^{-r_2} u_2(x, -t) dt,$$

где $0 < r_1, r_2 < 1$, $\varphi(x, y)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(1, 0) = \psi(0)$.

В области D_- методом Римана найдено решение задачи Гурса с данными $u(x, y) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $u(1, y) = \psi(y)$, $-1 \leq y \leq 0$. Исходя из него, получено выражение для функции $\nu_-(x)$

$$\nu_-(x) = - \int_x^1 (t-x)^{-r_1} \tau'(t) dt + \Psi(x),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & - \int_x^1 (t-x)^{-r_2} (1-t)^q dt \times \\ & \times \int_{-t}^0 [(1+s)^{-q} \psi(s)]' \left(\frac{s-x}{1+s} \right)^q F \left(-q, -q; 1; \frac{(s-x)(t-y)}{(t+x)(y+1)} \right) dt, \end{aligned}$$

и доказан принцип локального экстремума.

Лемма. Пусть функция $u(x, y) \in C(\overline{D_-}) \cap C^1(D_-)$, $u(x, y) \in C(D_-)$ является в области D_- решением уравнения $L(u)$ и $u(1, y) \equiv 0$, $-1 \leq y \leq 0$. Если функция $\tau(x) = u(x, 0)$ из класса $C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ достигает свое наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение на отрезке $[0, 1]$ в точке $x_0 \in (0, 1)$, то $\nu_-(x_0) > 0$ ($\nu_-(x_0) < 0$).

В области D_+ известен принцип экстремума [1]. Основываясь на этих принципах экстремума, доказана теорема единственности решения задачи V для уравнения $L(u)$.

Теорема. Если существует решение задачи V , то оно единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., 1985. С. 266–269.