Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 146–147

УДК 517.925.54:517.962.27/.8

ВСТРЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© А. О. Егоршин

egorshin@math.nsc.ru

Институт математики РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск

Рассматривается математическая модель двусторонних процессов. В модели используются финитные системы независимых векторов и процессы их двусторонней (встречной) ортогонализации Грама – Шмидта (Г – Ш), а также ее обобщение: процессы биортогонализации двух независимых систем. Показано, что такие встречные процессы лежащат в основе рекуррентных формул и уравнений вычислительной алгебры: QR и QL разложений, RL и LR факторизаций, двух типов (окаймление и суммирование) рекуррентных формул обращения матриц.

1. Новые результаты получены для частного случая такой модели — однородных систем: циклических систем, порожденных (частично) изометрическими операторами. В такой модели возможно взаимодействие указанных встречных (counter) процессов. Они называются далее — прямой (forward) и возвратный (backward). Различные уравнения таких процессов используются как в теории (например, ортогонализация полиномов на окружности), так и во многих прикладных областях. В частности, это уравнения распространения в “средах”, инвариантных к “сдвигу” (изотропных, стационарных).

Рассматривается новое приложение встречных процессов. Это задачи аппроксимации функций (непрерывного или дискретного аргумента) решениями стационарных обыкновенных линейных дифференциальных (разностных) уравнений [1]. В случае, когда коэффициенты уравнений неизвестны, мы приходим к задачам математического моделирования (функций, процессов, их уравнений; в приложениях такие задачи называются также задачами идентификации) [2]. Когда коэффициенты уравнений заданы, эти задачи аппроксимации приводят к известным (например, т. н. фильтр Калмана) линейным задачам сглаживания и фильтрации, но реализуемым “быстрыми” (fast) рекуррентными алгоритмами без уравнения Риккати.

Показано, что быстрые алгоритмы в однородных, стационарных системах есть следствия одной леммы о существовании двусторонних процессов ортогонализации Г – Ш [3].

2. Встречные процессы. Пусть в унитарном пространстве H задана система векторов $|x_0,\cdots,x_N| = \{x_i\}_0^N = X_N = X$ с элементами $x_i \in E_{(i)}$, $i=\overline{0,N}$. Элемент представляет собой набор из m_i векторов x_{ij}, $j=\overline{1,m_i}$: $x_i=|x_{i1},\cdots,x_{im_i}|$. Конструкции X и x_i считаем строками. Тогда матрица Грама системы X записывается так: $\Gamma=\Gamma(X)=(X,X)$. Если $\det\Gamma=0$, система векторов X называется вырожденной. Через $X_{l,k}$, ($k=\overline{0,N}$, $l=\overline{0,k}$) обозначаем отрезок $|x_l,\cdots,x_k|$ последовательности X, а через X_k — ее начальный отрезок $|x_0,\cdots,x_k|$. Через Через $S(x,\cdots,y)$ обозначаем подпространство — замкнутую линейную оболочку векторов аргументов $x,\cdots,y$. В частности, $S=S(X)$, $S_k=S(X_k)$, $S_{l,k}=S(X_{l,k})$. Обозначим через $\Pi_{l,k}=I-P_{l,k}=\Pi(X_{l,k})=\Pi(S_{l,k})$ — проектор на $S_{l,k}^{\perp}=H\ominus S_{l,k}$. В частности, $\Pi_{0,k}=\Pi_k$. Удобно считать, что $\Pi_{-1}=\Pi_{1,0}=\Pi_{k+1,k}=I$.

Определение 1 (встречных процессов ортогонализации).

a) *Прямой:* $f_k=\Pi_{k-1}x_k$, $h_k=(f_k,f_k)$, $k=\overline{0,N}$.

b) *Возвратный:* $f_{i/k}=\Pi_{1+i,k}x_i$, $f_{0/k}=\widetilde{f}_k$, $h_{i/k}=(f_{i/k},f_{i/k})$, $h_{0/k}=\widetilde{h}_k$, $i=\overline{0,k}$.

Лемма (о встречных процессах ортогонализации). *Пусть X — невырожденная система векторов. Тогда:*

1) *элементы f_l и $f_{i/l}$ процессов ортогонализации не вырождены:* $\det h_l\neq 0$, $\det h_{i/l}\neq 0$, $l=\overline{0,N}$, $i=\overline{0,l}$;

2) *проекторы* Π_k *с помощью элементов ортогонализации* f_k *и* $\widetilde{f}_k$ *определяются рекурентными формулами с начальными условиями* $\Pi_{-1} = \Pi_{1,0} = I$ *;*

3) *для значений* $k = \overline{-1, N-1}$ *имеют место следующие равенства:* $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k - f_{k+1}a_{k+1}(\,\cdot\,, f_{k+1})$, $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{1,k+1} - \widetilde{f}_{k+1}\widetilde{a}_{k+1}(\,\cdot\,, \widetilde{f}_{k+1})$, *где* $a_{k+1} = h_{k+1}^{-1}$ *и* $\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{h}_{k+1}^{-1}$.

3. Элементы линейной алгебры. Из этой леммы вытекают представления: $\Phi = XR$ и $\widetilde{\Phi} = XL$, где Φ и $\widetilde{\Phi}_n$ — строки ортонормальных элементов в H . Отсюда следуют рекуррентно вычисляемые QR QL представления. Из этих представлений выводятся рекуррентные формулы обращения и факторизации для матриц Грама: $(X,X)^{-1} = RR^*$ — Фробениуса и $(X,X) = R^{-*}R^{-1}$ — Холесского. Из $(X,X)^{-1} = RR^* = LL^*$ получим известные уравнения Риккати для обращения матриц с аддитивными факторизованными приращениями. Общий вид перечисленных уравнений (а не только для самосопряженных матриц) получается из двусторонних алгоритмов биортогонализации двух независимых систем X и Y [3].

Показано, что в цепи подпространств системы X существует и может быть найден базис с заданной матрицей Грама. В частности, существует базис с теплицевой матрицей Грама. Ей (и только ей) соответствует однородная система векторов.

4. Однородные системы.

Определение 2. Систему X назовем *однородной*, если ее элементы связаны изометрическими соотношениями: $x_{i+1} = Ux_i$, $x_i = U^*x_{i+1}$, $i = \overline{0, N-1}$.

Теорема (о быстрых алгоритмах). *Пусть система* X *невырождена и* $k = \overline{0, N-1}$. *Тогда*

1) *для векторов ортогонализации* f *и* $\widetilde{f}$ *имеем* $f_0 = \widetilde{f}_0 = x_0$ *и* $f_{k+1} = Uf_k - \widetilde{f}_k\widetilde{\theta}_{k+1}$, $\widetilde{f}_{k+1} = \widetilde{f}_k - Uf_k\theta_{k+1}$, *где* $\theta_{k+1} = a_k\mu_{k+1}$, $\widetilde{\theta}_{k+1} = \widetilde{a}_k\mu_{k+1}^*$, $\mu_{k+1} = (\widetilde{f}_k, Uf_k)$.

2) *Матрицы Грама* h *и* $\widetilde{h}$ *не вырождены и связаны следующими нелинейными рекуррентными соотношениями:* $h_0 = \widetilde{h}_0 = (x_0, x_0)$ *и* $h_{k+1} = h_k - \mu_{k+1}\widetilde{h}_k^{-1}\mu_{k+1}^*$, $\widetilde{h}_{k+1} = \widetilde{h}_k - \mu_{k+1}^*h_k^{-1}\mu_{k+1}$.

3) *Для нормирующих множителей* a *и* $\widetilde{a}$ *эти уравнения могут быть представлены в виде:* $a_0 = \widetilde{a}_0 = h_0^{-1}$ *и* $a_{k+1} = (I - \theta_{k+1}\widetilde{\theta}_{k+1})^{-1}a_k$, $\widetilde{a}_{k+1} = (I - \widetilde{\theta}_{k+1}\theta_{k+1})^{-1}\widetilde{a}_k$.

4) *Если система векторов* X *одномерна* $(m = 1)$, *то для всех* $k = \overline{0, N}$ *:* $a_{k+1} = (1 - \theta_{k+1}^2)^{-1}a_k$, $1 - \theta_{k+1}^2 > 0$.

5. Динамические системы. В $E = E^{N+n+1}$ задан оператор $\mathcal{R} : E \to E^{N+1}$ такой, что для $y \in E$ имеем: $\mathcal{R}y = \{\sum_{i=0}^n \alpha_i^* y_{k+i}\}_0^N = A^*y$. Матрица этого оператора в E есть A^* , где A — ленточная, теплицева $(N+n+1) \times (N+1)$ -матрица “скользящего” вектора — коэффициентов α оператора $\mathcal{R}$. Его ядро есть $K = S^{\perp}(A)$.

Рассматривается следующая вариационная задача математического моделирования (аппроксимационной идентификации). Для последовательности отсчетов $y = \{y_i\}_1^{N+n}$ найти минимум величины $J = J(\widetilde{y}) = \|y - \widetilde{y}\|_E^2$ при условии, что $A^*\widetilde{y} = 0$ [1].

Решение поставленной задачи сглаживания — проекция $\widehat{y}$ вектора y на ядро K . Это “обычная” линейная задача проектирования. Задача же идентификации является существенно нелинейной. Это минимизация по α длины соответствующего перпендикуляра [2]. Здесь величины $\widehat{J} = J(\widehat{y}) = \widehat{J}(\alpha) = y^*A(A^*A)^{-1}A^*y$. Развитая в п.п. 2, 4 теория позволяет использовать при решении этих задач (в том числе при реализации специальных итерационных процедур поиска оптимальных коэффициентов уравнения α) быстрые алгоритмы теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00776).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоршин А. О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65(12). С. 29–48.
2. *Егоршин А. О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих коэффициентов для последовательностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. Том III, № 2(6). С. 78–96.
3. *Егоршин А. О.* Симметрия порядка: некоторые следствия в анализе и приложениях для разностных и дифференциальных уравнений // Труды III международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск 25–29 августа 2002г. Красноярск: Изд. Ин–та вычислительного моделирования СО РАН, 2002. С. 84–90.