

УДК 51(075)

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© М. М. Ерекешева

e_meruert@mail.ru

Актюбинский государственный педагогический институт, Актюбе, Казахстан

Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n), \quad s = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где правые части этих уравнений непрерывны в области

$$t \geq t_0, |x_s| \leq H, s = \overline{1, n} \quad (2)$$

и допускают существование единственного решения при наперед заданных начальных условиях $t_0, x_1^0, \dots, x_n^0$ в области (2), $X_s(t, 0, \dots, 0) \equiv 0, s = \overline{1, n}$.

Пусть возмущение действует непрерывно, тогда наряду с уравнениями (1), рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + R_s(t, x_1, \dots, x_n), \quad s = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где функции $R_1, \dots, R_n$ характеризуют эти постоянно действующие возмущения и в отличие от функций $X_1, \dots, X_n$ практически никогда неизвестны. Эти функции, вообще говоря, не обращаются в нуль при $x_1, \dots, x_n = 0$. Относительно них лишь предполагаем, что они обеспечивают существование единственного решения для уравнений (3), определенного в области (2) и удовлетворяющего наперед заданным начальным условиям, взятым из этой области. Кроме того, предполагаем, что функции $R_1, \dots, R_n$ удовлетворяют в области (2) условию

$$\int_{t_0}^t |R_s(r, x_1, \dots, x_n)| d\tau < \rho, \quad s = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где ρ — достаточно малое положительное число. Постоянно действующие возмущения, характеризуемые функциями $R_1, \dots, R_n$ и удовлетворяющие условию (4), будем называть *малыми в среднем и исчезающими на бесконечности*, т. е. $R_s \in MC_\infty^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Невозмущенное решение называется *устойчивым* при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существуют два таких положительных числа δ и ρ , зависящих от ε и t_0 , что всякое возмущенное решение $x_s = x_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, удовлетворяющее в начальный момент t_0 условию

$$|x_s(t_0)| \leq \delta, \quad s = \overline{1, n}, \quad (5)$$

удовлетворяет при $t \geq t_0$ условию

$$|x_s(t)| \leq \varepsilon, \quad s = \overline{1, n}, \quad (6)$$

каковы бы ни были функции $R_1, \dots, R_n$ в возмущенных уравнениях, лишь бы они в области (2) удовлетворяли условию (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при выполнении условий (4), (5) неравенства при каком-нибудь $t \succ t_0$ нарушаются, то невозмущенное решение называется *неустойчивым* при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности, т. е. $R_s MC_\infty^0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если для уравнений без возмущений (1) существует функция $V(t, x)$ такая, что

- 1) $c_1^2 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_0^2 \|x\|^2$, $c_0 = \text{const} \succ 0$, $c_1 = \text{const} \succ 0$,
- 2) $\|\text{grad}_x V(t, x)\| \leq c_2^2 \|x\|^2$ или $\left| \frac{\partial V}{\partial x_s} \right| \succ c_2^2 \|x\|^2$, $c_2 = \text{const} > 0$,
- 3) $V'(t, x) \geq c_3^2 \|x\|^2$, $c_3 = \text{const} \succ 0$,

то невозмущенное решение неустойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

Теорема 2. Если для уравнений без возмущений (1) существует функция $V(t, x)$ такая, что

- 1) $V(t, x) \geq c_1^2 \|x\|^2$, $c_1 = \text{const} > 0$,
- 2) $\|\text{grad}_x V(t, x)\| \leq c_2^2 \|x\|$ или $\left| \frac{\partial V}{\partial x_s} \right| \succ c_2^2 \|x\|$, $c_2 = \text{const} > 0$,
- 3) $V' = \lambda V + W(x)$,

где λ — положительная постоянная, $W(s) \leq 0$, т. е. либо тождественно обращается в нуль, либо представляет собой знакопостоянную функцию, то невозмущенное решение неустойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бияров Т. Н. Об устойчивости нелинейных систем с постоянно действующими возмущениями // Сб. Международной конференции "Управление динамическими системами". Алматы, Изд. КазГУ, 1987. С. 24–36.
2. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 214 с.