

УДК 517.983.51

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© М. В. Фалалеев

mihail@ic.isu.ru

Иркутский государственный университет, Иркутск

Известно, что линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором в главной части разрешимы в классе непрерывных функций при определенных соотношениях между начальными данными и правыми частями. Поэтому естественным образом возникает задача построения обобщенных решений, для которых нет проблемы такого согласования. Автоматическими следствиями построения обобщенных решений являются проблемы: построение собственно самого обобщенного решения, выделение классов обобщенных функций, в которых такое решение будет единственным, получение условий совпадения обобщенных решений с непрерывными, если таковые существуют. В полном объеме эту триаду задач удастся решить с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции, введенной автором. В цикле работ [1, 2] были построены фундаментальные оператор-функции для ряда дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов преимущественно зависящих от одной переменной. Но в последнее время удалось конструкцию фундаментальной оператор-функции перенести и на некоторые дифференциальные уравнения в частных производных. В представляемом докладе сделан обзор результатов как из [1, 2], так и новых. Приведем здесь один из новых результатов, при этом будем придерживаться обозначения и терминологии работ [1, 2].

Введем условие

А) $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор B фредгольмов, т.е. $\dim N(B) = \dim(B^*) = n$ и имеет полный A — жорданов набор, элементы $\{\varphi_i^{(j)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}\}$ составляют этот набор, а функционалы $\{\psi_i^{(j)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}\}$ образуют соответствующий полный A^* — жорданов набор оператора B^* , $\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$.

При выполнении условия А) оператор $\Gamma = (B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i)^{-1}$ является ограниченным, а оператор $Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}$, проектором.

Теорема 1. Если оператор A непрерывно обратим, выполнены условие А) и оценка $\max \left(\| e^{-\alpha(A\Gamma)^{-1}} \|, \| e^{-\alpha(\Gamma^* A^*)^{-1}} \| \right) \leq K e^{-\alpha C}$, $K > 0$, $C \geq 0 \forall \alpha \geq 0$, то вырожденный оператор теплопроводности на классе $K'(R_+^1 \otimes R^{2N}; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{E}_{2N}(t, \bar{x}) = \Gamma \delta(t, \bar{x}) * \frac{1}{(4\pi t)^N} \left((A\Gamma)^{-1} \right)^N \exp \left(-\frac{(A\Gamma)^{-1} |\bar{x}|^2}{4t} \right) [I - Q] \theta(t) - \\ - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \left(V_{2N}(\bar{x}) * \right)^{k+1} \cdot \delta^{(k)}(t) \right],$$

где $V_2(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\bar{x}|}$ и $V_N(\bar{x}) = \frac{1}{(N-2) \cdot \sigma_N \cdot |\bar{x}|^{N-2}}$, при $N \geq 3$, σ_N — площадь поверхности единичной сферы в R^N .

Если оператор $A\Gamma$ позитивен [3], то существуют ограниченные операторы $\sqrt{A\Gamma}^{-1}$ и $(A\Gamma)^{-1} = (\sqrt{A\Gamma}^{-1})^2$ и результат теоремы 1 распространяется на операторы теплопроводности с нечетным количеством пространственных переменных.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и оператор $A\Gamma$ позитивен, то оператор-функция

$$\mathcal{E}_{2N+1}(t, \bar{x}) = \Gamma \delta(t, \bar{x}) * \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^{2N+1}} \left(\sqrt{A\Gamma}^{-1} \right)^{2N+1} \cdot \exp \left(-\frac{(A\Gamma)^{-1} |\bar{x}|^2}{4t} \right) \left[I - Q \right] \theta(t) - \\ - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \left(V_{2N+1}(\bar{x}) * \right)^{k+1} \cdot \delta^{(k)}(t) \right],$$

является фундаментальной для вырожденного оператора теплопроводности с $(2N+1)$ пространственными переменными.

В предположении выполнения условий теоремы 1 (или 2) рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$B \frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial t} - A \Delta u(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x}), \quad u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}) \quad t > 0, \quad \bar{x} \in R^m.$$

В обобщенных функциях эта задача переписывается следующим образом

$$(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot \Delta\delta(\bar{x})) * v(t, \bar{x}) = f(t, \bar{x})\theta(t) + Bu_0(\bar{x})\delta(t),$$

соответственно обобщенное решение задачи Коши имеет вид

$$v(t, \bar{x}) = \mathcal{E}_m(t, \bar{x}) * (f(t, \bar{x})\theta(t) + Bu_0(\bar{x})\delta(t)).$$

В случае, когда все $p_i = 1, i = 1, \dots, n$ обобщенное решение содержит только регулярную составляющую и совпадает с классическим (непрерывным) решением, если начальное условие $u_0(\bar{x})$ и правая часть уравнения $f(t, \bar{x})$ связаны соотношениями

$$\langle Au_0(\bar{x}), \psi_i^{(1)} \rangle + \int_{R^m} V_m(\bar{x} - \bar{y}) \langle f(0, \bar{y}), \psi_i^{(1)} \rangle d\bar{y} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., and Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.
2. Фалалеев М. В., Гражданцева Е.Ю. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С 769–774.
3. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустырьник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966. 500 с.