Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 330–331

УДК 517.957

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА

© А. В. Фаминский

andrei_faminskii@mail.ru

Российский университет дружбы народов, Москва

Уравнение Захарова – Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0 \tag{1}$$

является одним из вариантов многомерного обобщения уравнения Кортевега – де Фриза и описывает распространение нелинейных волн в диспергирующей среде. Волны движутся в направлении оси $0x$ и испытывают деформации в поперечном направлении.

Для уравнения (1) рассматриваются начально–краевые задачи в трех различных областях: 1) $\Pi_T^+ = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$, 2) $\Pi_T^- = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x < 0, y \in \mathbb{R}\}$, 3) $Q_T = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x \in (0,1), y \in \mathbb{R}\}$. Во всех трех случаях ставится начальное условие

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y) \tag{2}$$

и краевые условия следующего вида:
1) для задачи в Π_T^+ одно условие

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \tag{3}$$

2) для задачи в Π_T^- два условия

$$u\big|_{x=0} = u_2(t,y), \qquad u_x\big|_{x=0} = u_3(t,y), \tag{4}$$

3) для задачи в Q_T три условия

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \qquad u\big|_{x=1} = u_2(t,y), \qquad u_x\big|_{x=1} = u_3(t,y). \tag{5}$$

Решения $u(t,x,y)$ рассматриваемых задач строятся в следующих функциональных пространствах $Z_k((0,T)\times I\times\mathbb{R})$ для натуральных k, где $I = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_-$ или $I = (0,1)$ соответственно:

$$1) D_t^m u \in C([0,T]; H^{k-3m}(I\times\mathbb{R})), \qquad m \le k/3;$$
$$2) D_x^l u \in C_b(\overline{I}; H_{t,y}^{(k-l+1)/3,k-l+1}((0,T)\times\mathbb{R})), \qquad l \le k+1;$$
$$3) D_t^m D_x^l D_y^j u \in L_2(I; C_b([0,T]\times\mathbb{R})), \qquad 3m+l+j \le k-1;$$
$$4) D_t^m D_x^l D_y^j u \in L_2(0,T; C_b(\overline{I}\times\mathbb{R})), \qquad 3m+l+j \le k$$

(здесь везде m, l, j — целые неотрицательные числа).

Изучается вопрос о локальной и глобальной корректности поставленных задач. Под корректностью понимается существование, единственность и непрерывная зависимость решений от граничных данных в рассматриваемых функциональных пространствах. В случае локальной корректности значение параметра T зависит от граничных данных, в случае глобальной — является любым положительным числом.

Чтобы сформулировать полученные результаты введем вспомогательные функции, связанные с условиями согласования граничных данных: положим $\Phi_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а для натуральных m

$$\Phi_m(x,y) \equiv -(D_x^3 + D_x D_y^2)\Phi_{m-1}(x,y) - \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l \Phi_l(x,y) D_x \Phi_{m-l-1}(x,y).$$

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_1 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_1(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$ *для* $0 \le m < k/3$. *Тогда задача (1),(2),(3) глобально корректна в* $Z_k(\Pi_T^+)$.

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_2 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$, $u_3 \in H_{t,y}^{k/3,k}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_2(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$ *для* $0 \le m < k/3$, $D_t^m u_3(0,y) \equiv \Phi_{m\,x}(0,y)$ *для* $0 \le m < (k-1)/3$. *Тогда задача (1),(2),(4) локально корректна в* $Z_k(\Pi_T^-)$.

Теорема 3. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_1, u_2 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$, $u_3 \in H_{t,y}^{k/3,k}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_1(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$, $D_t^m u_2(0,y) \equiv \Phi_m(1,y)$ *для* $0 \le m < k/3$, $D_t^m u_3(0,y) \equiv \Phi_{m\,x}(1,y)$ *для* $0 \le m < (k-1)/3$. *Тогда задача (1),(2),(5) глобально корректна в* $Z_k(Q_T)$ *при* $k \ge 3$ *и локально корректна при* $k \le 2$.

Условия на граничные функции являются естественными, так как они индуцированы свойствами оператора $D_t + D_x^3 + D_x D_y^2$, а именно, если рассмотреть линейную задачу Коши

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x,y) \in H^k,$$

то для решения этой задачи $v \in C_b(\mathbb{R}_t; H^k)$ справедливо следующее свойство: равномерно по $x \in R$

$$\big\|D_t^{1/3} v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} + \big\|D_x v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} + \big\|D_y v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} \sim \|v_0\|^2_{H^k}.$$

Аналогичные результаты о глобальной корректности задачи Коши для уравнения (1) были получены в работе [1]. Глобальная корректность задачи (1)–(3) в пространстве $Z_1(\Pi_T^+)$ ранее установлена в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00253)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова – Кузнецова // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1070–1081.
2. *Фаминский А. В.* О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова – Кузнецова // Совр. математика и ее приложения. 2006. Т. 38. С. 135–148.