

УДК 517.9

ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

© В. Е. Федоров, О. А. Рузакова

kar@csu.ru, amber@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $K_m \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $m = 1, 2$, $a_i, b_j \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = \overline{0, s}$. Рассмотрим задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \lambda u(x, t) = \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (2)$$

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t) + \int_{\Omega} K_1(x, y) u(y, t) dy + \int_{\Omega} K_2(x, y) v(y, t) dy +$$

$$+ a_0(x) u + \sum_{i=1}^s a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x) v + \sum_{j=1}^s b_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (3)$$

$$\Delta v(x, t) + \beta v(x, t) + \alpha u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (4)$$

Искомými в задаче являются функции $u(x, t)$, $v(x, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система (1)–(4) при $K_m \equiv 0$, $m = 1, 2$, $a_i \equiv b_j \equiv 0$, $i, j = \overline{0, s}$, является, с точностью до линейной замены, линеаризацией в нуле начальной задачи для системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [1, 2].

Редуцируем задачу (1)–(4) к задаче

$$Pu(0) = Pu_0 \quad (5)$$

для уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + Nu(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (6)$$

с сильно (L, p) -радиальным [3, 4] оператором. Здесь $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M, N : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$, P — единица полугруппы уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$, существующей при заданных условиях на операторы L, M .

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \alpha & \beta + \Delta \end{pmatrix},$$

$$H_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) : (\frac{\partial}{\partial n} + \lambda)w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\}, \quad \text{dom} M = \left(H_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}^2(\Omega)\right)^2,$$

$$N_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} K_1(x, y) u(y) dy + \int_{\Omega} K_2(x, y) v(y) dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}),$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} a_0(x) + \sum_{i=1}^s a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} & b_0(x) + \sum_{j=1}^s b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$N = N_1 + N_2$, $\text{dom} N = \text{dom} N_2 = (H^1(\Omega))^2$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ (т. е. линейный и непрерывный), $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$ (т. е. линейный, замкнутый с плотной областью определения), $N_2, N \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$. Причем, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$.

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\text{dom} A = H_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Следующий результат получен в [5].

Теорема 1. Пусть $-\beta \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$ -радиален.

При доказательстве следующей теоремы использованы редукция задачи (5), (6) к двум задачам (сингулярной и регулярной) на взаимно дополнительных подпространствах, как это делается в [3, 4], и результаты классической теории возмущений полугрупп операторов [6] при исследовании получившейся регулярной задачи.

Теорема 2. Пусть $-\beta \notin \sigma(A)$, $u_0 \in H_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}^2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение $(u, v) \in (C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)))^2$ задачи (1)–(4).

Рассмотрим теперь систему

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t) + \int_{\Omega} K_1(x, y) u(y, t) dy + a_0(x) u + \sum_{i=1}^s a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$(x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (7)$$

$$\Delta v(x, t) + \beta v(x, t) + \alpha u(x, t) + \int_{\Omega} K_2(x, y) u(y, t) dy + b_0(x) u + \sum_{j=1}^s b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

$$(x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (8)$$

Здесь, как и прежде, $K_m \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $m = 1, 2$, $a_i, b_j \in L_{\infty}(\Omega)$, $i, j = \overline{0, s}$.

Аналогичным образом получен следующий результат

Теорема 3. Пусть $-\beta \notin \sigma(A)$, $u_0 \in H_{\frac{\partial}{\partial n} + \lambda}^2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение $(u, v) \in (C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)))^2$ задачи (1), (2), (7), (8).

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 07-01-96030-р_урал_a) и грантом Президента России для молодых российских ученых – докторов наук (код проекта МД-4312.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плотников П. И., Старовойтов В. Н. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
2. Плотников П. И., Клепачева А. В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.
3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.
4. Федоров В. Е. Обобщение теоремы Хилле – Йосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.
5. Федоров В. Е., Уразаева А. В. Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 161–172.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004.