Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 334–334

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ И ПОВЫШЕНИИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

© М. В. Фокин

fokin@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается задача Дирихле для уравнения колебания струны в выпуклой области Ω с аналитической границей Γ в плоскости переменных x, y:

$$D_{xy}^2 u = f, \qquad u|_\Gamma = 0.$$

Изучаются вопросы единственности сильных и слабых решений и повышения их гладкости в Соболевской шкале гильбертовых пространств $W_2^k(\Omega)$, а также в специальных пространствах с весовыми нормами. Ответы на указанные вопросы существенным образов зависят от геометрических свойств области. Основной характеристикой этих свойств является наличие или отсутствие замкнутых ломаных линий, вписанных в область и состоящих из отрезков характеристик уравнения, а также значение числа вращения соответствующего диффеоморфизма границы, сохраняющего ее ориентацию. В типичной ситуации, когда число вписанных ломаных конечно, задача Дирихле является нормально разрешимой, а гладкость сильных решений возрастает с ростом гладкости правой части f. Однако ядро сопряженной задачи в этом случае является бесконечномерным. Основное внимание в докладе уделяется случаю, когда имеется единственность как сильных, так и слабых решений рассматриваемой задачи. Для этого случая удается сформулировать необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять заданная область: она должна быть образом при гиперболическом отображении $x = H(u)$, $y = G(v)$ некоторого эллипса из специального семейства эллипсов на плоскости u, v. При этом для области не существует вписанных замкнутых ломаных, составленных из характеристик, а число вращения α диффеоморфизма границы иррационально. Скорость сходимости рациональных приближений к α определяет зависимость гладкости решений задачи Дирихле от гладкости правой части. Для слабых решений задачи Дирихле получены оценки их норм в шкале гильбертовых пространств, включающей пространства с отрицательными индексами (норма в которых более слабая, чем в $L_2(\Omega)$).