

УДК 517.948

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

© М. Г. Гадоев

gadoev@rambler.ru

Мурнинский политехнический институт, Мурманск

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^\infty$. Введем пространство $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$ функций $u(x) (x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$\|u, W_{2,\alpha}^1(\Omega)\| = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |u'_{x_i}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь число $\alpha \in [0, 1)$, $\rho(x) = \text{dist}\{x, \partial\Omega\}$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$.

В этой работе исследуется асимптотическое распределение собственных значений (с. з.) оператора

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) q(x) u'_{x_i}(x))'_{x_j},$$

заданного в пространстве $H = L_2(\Omega)^l$, в предположении, что матрица $q(x)$ при $x \in \partial\Omega$ имеет лишь простые с.з. Ранее аналогичные исследования приводились [1], в предположении, что матрица $q(x)$ имеет простые с.з. для $x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. В работах [2, 3] предполагается, что $n = 1$.

Область определения оператора A задается следующим образом:

$$D(A) = \{u \in \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega) \cap W_{2,loc}^2(\Omega) : \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) q(x) u'_{x_i}(x))'_{x_j} \in H\}$$

Сформулируем условия на $q(x)$, $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$). Предположим, что

$$a_{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), q(x) \in C^2(\bar{\Omega}; \text{End } \mathbb{C}^l),$$

$$a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)} \quad (x \in \Omega, i, j = \overline{1, n}).$$

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n), c > 0.$$

Далее, предположим, что с. з. $\mu_1(x), \dots, \mu_l(x)$ матрицы $q(x) (x \in \Omega)$ расположены на положительной полуоси R_+ и вне угла

$$\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varphi\}, \quad \varphi \in (0, \pi];$$

(функция $\arg z$ принимает значения на $(-\pi, \pi]$), т. е. занумеруем их так, что $\mu_j(x) \in C(\bar{\Omega})$, ($j = \overline{1, n}$) и $\mu_j(x) \in R_+$ ($j = \overline{1, \nu}$), $\mu_j(x) \notin \Phi$ ($j = \overline{\nu+1, l}$), $\nu \in \{1, \dots, l\}$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ последовательность с.з. оператора A из угла Φ , упорядоченных в порядке неубывания их модулей. Положим

$$N(t) = \text{card}\{j : |\lambda_j| \leq t\}, t > 0.$$

При выполнении перечисленных условий имеет место следующая

Теорема. Для любого замкнутого сектора $S \subset \Phi \setminus R_+$ с вершиной в нуле для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ оператор $A - \lambda E$ непрерывно обратим и верна оценка

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq M_S |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq M'_S).$$

Имеет место асимптотическая формула

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} v_n t^{n/2} \int_{\Omega} \rho^{-n\alpha}(x) \mu^{-n/2}(x) (\det a(x))^{-1/2} dx, t \rightarrow +\infty,$$

где v_n — объем единичного шара в R^n , $a(x) = (a_{kj}(x))_{k,j=1}^n$, $\mu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k^{-n/2}(x)$.

При этом $\lim_{j \rightarrow \infty} \arg \lambda_j = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самирипул А., Седдики К. Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, вырождающихся на границе области // Математические заметки. 1997. Т. 61, № 3. С. 463–467.
2. Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка // Вестник МГУ, сер. 1, матем., мех. 1990. № 3. С. 24–31.
3. Бойматов К. Х. Асимптотика спектра несамосопряженных систем, дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1992. Т. 51, № 4. С. 8–16.