

УДК 532.54

К УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© Ю. Г. Губарев

gubarev@hydro.nsc.ru , Yu.G.Gubarev@mail.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуются плоские течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями:

$$\begin{aligned} Du = -p_x, \quad Dv = -p_y, \quad u_x + v_y = 0 \text{ в } \tau; \quad v = 0 \text{ на } \partial\tau \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — компоненты поля скорости жидкости; $p(x, y, t)$ — поле давления; $D \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ — дифференциальный оператор; x, y — декартовы координаты; t — время; $\tau \equiv \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < H\}$ — область течения жидкости; $\partial\tau \equiv \{(x, y) : -\infty < x < +\infty; y = 0, H\}$ — граница области течения; H — ширина зазора между поверхностями. Нижними индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные искомых функций.

Смешанная задача (1) обладает точными стационарными решениями в форме

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad p \equiv \text{const} \quad (2)$$

(здесь U — произвольная функция независимой переменной y).

Изучается устойчивость точных стационарных решений (2) относительно малых плоских возмущений, описываемых начально-краевой задачей вида

$$\xi_{1t} = u' - U\xi_{1x} + \xi_2 \frac{dU}{dy}, \quad \xi_{2t} = v' - U\xi_{2x}; \quad \xi_{1tt} + 2U\xi_{1tx} + U^2\xi_{1xx} = -p'_x, \quad \xi_{1x} + \xi_{2y} = 0 \quad (3)$$

$$\xi_{2tt} + 2U\xi_{2tx} + U^2\xi_{2xx} = -p'_y, \quad \omega' = \xi_2 \frac{d^2U}{dy^2} \text{ в } \tau; \quad \xi_2 = 0 \text{ на } \partial\tau; \quad \xi_1(x, y, 0) = \xi_{10}(x, y)$$

$$\xi_{1t}(x, y, 0) = (\xi_{1t})_0(x, y), \quad \xi_2(x, y, 0) = \xi_{20}(x, y), \quad \xi_{2t}(x, y, 0) = (\xi_{2t})_0(x, y)$$

где $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$, $p'(x, y, t)$ и $\omega'(x, y, t)$ — малые возмущения полей скорости, давления и завихренности; $\xi_1(x, y, t)$, $\xi_2(x, y, t)$ — компоненты поля лагранжевых смещений.

Анализ смешанной задачи (3) показывает, что с помощью её уравнений может быть получено основное дифференциальное неравенство в форме

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0; \quad M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^H (\xi_1^2 + \xi_2^2) dy dx$$

(здесь λ — положительная постоянная величина), интегрирование которого на полуинтервалах $\pi n/(2\lambda) \leq t < \pi(n+1)/(2\lambda)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) позволяет, в свою очередь, прийти к априорной оценке снизу

$$M(t) \geq C \exp(\lambda t); \quad C \equiv \text{const} > 0 \quad (4)$$

если справедливы соотношения

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0) \exp\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0) \exp\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (5)$$

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0)$$

Оценка снизу (4) свидетельствует о том, что точные стационарные решения (2) начально-краевой задачи (1) абсолютно неустойчивы по отношению к малым плоским возмущениям (3), нарастающим во времени не медленнее, чем экспоненциально, с начальными данными, которые удовлетворяют двум последним неравенствам системы соотношений (5), в случае, разумеется, когда у смешанной задачи (3) существуют отвечающие таким возмущениям решения.

Этот вывод наглядно и убедительно подтверждается аналитическим примером установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (2) в форме

$$U(y) = a - b \exp(cy) \quad (6)$$

где a , b и c — произвольные вещественные постоянные величины, и наложенных на них малых плоских возмущений (3), (5) вида

$$\xi_1(x, y, t) \equiv f_1(y) \exp(\alpha t + i\beta x), \quad \xi_2(x, y, t) \equiv f_2(y) \exp(\alpha t + i\beta x) \quad (7)$$

$$p'(x, y, t) \equiv f_3(y) \exp(\alpha t + i\beta x); \quad f_1 = -\frac{i\beta f_3}{(\alpha + i\beta U)^2}, \quad f_3 = -\left[\frac{\alpha + i\beta U}{\beta}\right]^2 \frac{df_2}{dy}, \quad g(y) \equiv (\alpha + i\beta U)f_2$$

$$\eta \equiv -i\beta b \exp(cy), \quad w(\eta) \equiv g\eta^{-k}, \quad k \equiv \pm \frac{\beta}{c}; \quad z \equiv -\frac{\eta}{\alpha + i\beta a}, \quad k = -\frac{4}{3}, \quad \beta = \mp \frac{4c}{3}$$

$$w(z) = \left(1 + \frac{3z}{5} + \frac{6z^2}{5} - \frac{14z^3}{5}\right) \left(C_1 + \frac{25C_2}{1458} \left[\frac{3z^{2/3}(5 + 5z - 28z^2)}{14z^3 - 6z^2 - 3z - 5} - 2\sqrt{3} \arctg\left(\frac{1 + 2z^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + z^{1/3} + z^{2/3}}{[z^{1/3} - 1]^2}\right)\right]\right); \quad z_0 \equiv \frac{i\beta b}{\alpha + i\beta a}, \quad z_H \equiv \frac{i\beta b \exp(cH)}{\alpha + i\beta a}$$

$$C_1 = -\frac{25C_2}{1458} \left(\frac{3z_0^{2/3}[5 + 5z_0 - 28z_0^2]}{14z_0^3 - 6z_0^2 - 3z_0 - 5} - 2\sqrt{3} \arctg\left[\frac{1 + 2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}\right] + \ln\left(\frac{1 + z_0^{1/3} + z_0^{2/3}}{[z_0^{1/3} - 1]^2}\right)\right)$$

$$\frac{3z_0^{2/3}(5 + 5z_0 - 28z_0^2)}{14z_0^3 - 6z_0^2 - 3z_0 - 5} - 2\sqrt{3} \arctg\left(\frac{1 + 2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + z_0^{1/3} + z_0^{2/3}}{[z_0^{1/3} - 1]^2}\right) =$$

$$= \frac{3z_H^{2/3}(5 + 5z_H - 28z_H^2)}{14z_H^3 - 6z_H^2 - 3z_H - 5} - 2\sqrt{3} \arctg\left(\frac{1 + 2z_H^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + z_H^{1/3} + z_H^{2/3}}{[z_H^{1/3} - 1]^2}\right)$$

(здесь α — некоторая комплексная постоянная, β — вещественная постоянная величина, C_1 — комплексная постоянная, C_2 — произвольная постоянная величина), поскольку среди малых плоских возмущений (3), (5), (7) всегда есть, что несложно проверить, возмущения, растущие со временем экспоненциально, причём, как это ни удивительно, даже несмотря на то, что для установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (2), (6) имеют место известные достаточные условия линейной устойчивости (Релея, Фьортофта и Арнольда).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00900).