

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ВАРИАЦИОННОМ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА

© В. М. Ипатова

ipatval@mail.ru

Московский физико-технический институт (ГУ), Долгопрудный Московской обл.

Пусть G – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с непрерывной по Липшицу границей ∂G , $0 < T < +\infty$, $Q = G \times (0, T)$, $\Gamma = \partial G \times [0, T]$. В [1,2] сформулирован вариационный метод построения решений системы Навье-Стокса

$$u_t + (u \nabla)u - \mu \Delta u = \nabla P + \hat{f}, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (3)$$

при котором условие соленоидальности (3) не включается в определение решения задачи (1)–(2), а удовлетворяется посредством минимизации функционала $J = \int_Q (\operatorname{div} u)^2 dQ$. Заметим, что исследование разрешимости начально-краевой задачи (1)–(2) является весьма сложной проблемой, поскольку для ее решений не удастся получить глобальных априорных оценок. В настоящей работе предлагается заменить уравнение движения (1) на уравнение

$$u_t + (u \nabla)u + \frac{u}{2} \operatorname{div} u - \mu \Delta u = f, \quad (4)$$

где вектор-функцию $f = \nabla P + \hat{f}$ будем считать известной. Подобная замена оправдана тем, что при выполнении условия соленоидальности (3) уравнения (1) и (4) совпадают, но разрешимость начально-краевой задачи (4), (2) может быть исследована, что будет показано ниже.

Обозначим через $H = (L_2(G))^n$, $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в H ; $H^k \subset H$, $k = 1, 2$ – пространства вектор-функций высоты n равных нулю на Γ , все пространственные производные которых до порядка k включительно принадлежат H ; H^{-k} – сопряженные с H^k пространства при отождествлении H со своим сопряженным;

$$Y = L_2(0, T; H^1), \quad Y^* = L_2(0, T; H^{-1}),$$

$$V = \{u \in Y, u_t \in Y^*\}, \quad W = \{u \in L_2(0, T; H^2), u_t \in (L_2(Q))^2\}.$$

Умножая (4) на u скалярно в H , получаем для гладких решений задачи (4), (2) равенство $(u_t, u) + \mu \|\nabla u\|^2 = (f, u)$. Используя вытекающую из него априорную оценку и метод Галеркина со специальным выбором базиса [3], можно показать, что верна следующая

Теорема 1. При всех $u_0 \in H$ и $f \in Y^*$ задача (4), (2) имеет хотя бы одно решение $u \in Y \cap L_\infty(0, T; H)$, для которого при почти всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u\|^2 dt' \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t (f, u) dt'.$$

Более полные результаты удастся получить для случая $n = 2$. А именно, справедлива

Теорема 2. Пусть $n = 2$, тогда при всех $u_0 \in H$ и $f \in Y^*$ задача (4),(2) имеет единственное решение $u \in V$. Если к тому же $u_0 \in H^1$, $f \in (L_2(Q))^2$ и граница ∂G есть кривая класса C^2 , то $u \in W$.

Обозначим через F разрешающий оператор задачи (4),(2), то есть представим ее решение в виде $u = F(u_0, f)$. Кроме того, введем в рассмотрение линеаризованную задачу

$$v_t + (u \nabla)v + \frac{u}{2} \operatorname{div} v + (v \nabla)u + \frac{v}{2} \operatorname{div} u - \mu \Delta v = h, \quad (5)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (6)$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $n = 2$, тогда F задает непрерывное и дифференцируемое отображение пространства $H \times Y^*$ на V , причем его производная Фреше является разрешающим оператором задачи (5)–(6). Если к тому же граница $\partial G \in C^2$, то F непрерывен и дифференцируем по Фреше как оператор, действующий из $H^1 \times (L_2(Q))^2$ на W .

Автор благодарит В. И. Агошкова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agoshkov V. I. Iterative processes for some boundary value problems of hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V. 19, N 3. P. 207–222.
2. Агошков В. И., Ботвиновский Е. А. Численное решение нестационарной системы Стокса методами теории оптимального управления и сопряженных уравнений // Международная конференция "Тихонов и современная математика". Тезисы докладов секции "Вычислительная математика". Москва, МГУ, 19-25 июня 2006 г. С. 14–15.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.