Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 165–166

УДК 517.95+517.97

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ОКЕАНА С НЕПРЕРЫВНОЙ ПО ЛИПШИЦУ ПЛОТНОСТЬЮ И РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

© В. М. Ипатова

ipatval@mail.ru

Московский физико-технический институт (ГУ), Долгопрудный

Разрешимость уравнений крупномасштабной динамики океана была изучена в [1–3] при предположении, что плотность воды $\rho = \rho(T, S)$ является линейной функцией температуры T и солености S. В настоящей работе устанавливается существование решений для модели, в которой плотность считается нелинейной непрерывной по Липшицу функцией, $|\rho(T_1, S_1) - \rho(T_2, S_2)| \le L\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (S_1 - S_2)^2}$, $\forall T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathbf{R}$, а также исследуется разрешимость задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений в этой модели. Пусть Ω — открытое подмногообразие сферы радиуса R с кусочно-гладкой границей, x, y, r — сферические координаты, $H(x, y)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, $z = R - r$, $G = \{(x, y) \in \Omega, 0 < z < H(x, y)\}$, Σ — боковая граница G, Ω_H — нижняя граница G при $z = H(x, y)$, $\mathbf{n}_\Sigma = (\mathbf{n}, 0)$ и $\mathbf{n}_H$ — векторы внешней нормали к Σ и Ω_H, $0 < t_1 < \infty$, $D = \Omega \times (0, t_1)$; $(u, v, w) \equiv (\mathbf{u}, w)$ — вектор скорости, $w = w(\mathbf{u}) = div \int_z^{H(x,y)} \mathbf{u} dz'$, $\xi = \xi(x, y, t)$ — возвышение уровня поверхности океана. Далее символ ϕ используется как общее обозначение функций u, v, T, S.

Система уравнений динамики океана записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + g\nabla\xi + g/\rho_0 \nabla \int_0^z \rho dz' = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad \xi_t + div \int_0^H \mathbf{u} dz = Q_w, \tag{2}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla + w(\mathbf{u})\partial/\partial z$, $B(u)\mathbf{u} = (2\omega \sin y + u \mathrm{tg} y/R)(-v, u)$, $A_\phi = -\mu_\phi \triangle - \nu_\phi \partial^2/\partial z^2$, $g, \rho_0, \omega, \mu_\phi, \nu_\phi$ — положительные постоянные, $A_u = A_v = A$, $\mathbf{f}, f_T, f_S$ — заданные функции.

Систему (1)–(2) дополним начальным условием

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0,\ T = T^0,\ S = S^0,\ \xi = \xi^0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\nu \mathbf{u}_z = -\frac{\tau}{\rho_0} + \frac{w(\mathbf{u})}{2}\mathbf{u} \quad \nu_\psi \psi_z = \gamma_\psi(\psi - \psi_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2}\psi + Q_\psi \quad \text{при} \ \ z = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = \nabla T \cdot \mathbf{n} = \nabla S \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \ \Sigma; \ \ (\mu_\phi \nabla\phi, \nu_\phi \frac{\partial\phi}{\partial z})\cdot \mathbf{n}_H = 0 \ \text{ на } \ \Omega_H, \tag{5}$$

где ψ означает T и S, γ_ψ — положительные постоянные, τ, ψ_s, Q_ψ — заданные функции.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$, $(\cdot,\cdot)_D$ и $\|\cdot\|_D$ скалярное произведение и норму в $L_2(G)$, $L_2(\Omega)$ и $L_2(D)$. Пусть $H^k(G) = W_2^k(G)$ и $\mathbf{H}_0^k(G)$ есть пространства Соболева функций и вектор-функций, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ на Σ, $H^{-k}(G)$ и $\mathbf{H}_0^{-k}(G)$ — сопряженные к ним пространства,

$$X=\{\mathbf{u}\in L_2(0,t_1;\mathbf{H}_0^1(G)),\ \mathbf{u}_t\in L_{4/3}(0,t_1;\mathbf{H}_0^{-2}(G))\},\quad Y=\{T\in L_2(0,t_1;H^1(G)),$$

$$T_t\in L_{4/3}(0,t_1;H^{-2}(G))\},\quad Z=\{\xi\in L_2(D),\ \xi_t\in L_2(D)\},\quad V=X\times Y\times Y\times Z,$$

$$\mathcal{H}=(L_2(G))^4\times L_2(\Omega),\quad W=V\cap L_\infty(0,t_1;\mathcal{H}),\quad P=L_2(0,t_1;\mathbf{H}_0^{-1}(G));$$

$$U=\{\mathbf{u},T,S\},\ \Xi=\{\mathbf{u},T,S,\xi\},\quad \|\Xi\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+\|T\|^2+\|S\|^2+g\|\xi\|_0^2,$$

$$[\phi,\phi_1]=\mu_\phi(\nabla\phi,\nabla\phi_1)+\nu_\phi\,(\partial\phi/\partial z,\partial\phi_1/\partial z)+\gamma_\phi(\phi,\phi_1)_0|_{z=0},$$

$$[U,U_1]=[u,u_1]+[v,v_1]+[T,T_1]+[S,S_1],\quad \gamma_u=\gamma_v=0.$$

Введем в рассмотрение неравенство

$$\|\Xi(t)\|^2/2+\int_0^t[U,U]dt'\le\|\Xi^0\|^2/2+$$
$$\int_0^t\big((F,U)+g/\rho_0(\int_0^z\rho dz',\mathrm{div}\ \mathbf{u})+(F_0,U)_0|_{z=0}+g(Q_w,\xi)_0\big)dt'. \tag{6}$$

Теорема 1. *При всех $\Xi^0=\{\mathbf{u}^0,T^0,S^0,\xi^0\}\in\mathcal{H}$, $\mathbf{f}\in P$, $f_T,f_S\in L_2(0,t_1;H^{-1}(G))$, Q_w, T_s, Q_T, S_s, Q_S, принадлежащих $L_2(D)$, и $\tau\in(L_2(D))^2$ задача (1)–(5) имеет хотя бы одно решение $\Xi\in W$, для которого при почти всех $t\in[0,t_1]$ верно неравенство (6).*

Пусть в области $D_1\subset D$ известны данные наблюдений за возвышением уровня поверхности океана $\xi=\xi_{obs}(x,y,t)$ и за поверхностной температурой $T|_{z=0}=T_{obs}(x,y,t)$, которые мы продолжим нулем на $D\setminus D_1$. Данные наблюдений используются для отыскания потоков влаги Q_w, тепла Q_T и соли Q_S. Будем считать, что $q=\{Q_w,Q_T,Q_S\}$ разыскивается в пространстве $Q=E\times(L_2(D))^2$, где $E=L_p(0,t_1;W_2^1(\Omega))\cap L_2(D)$, $1<p\le 2$. Обозначим через $\mathcal{U}(q)\subset W$ множество всех решений задачи (1)–(5), отвечающих данному значению q и удовлетворяющих (6). Рассмотрим множество M всех пар $\{q,\Xi\}$ таких, что $q\in Q$, $\Xi\in\mathcal{U}(q)$. Определим на M функционал

$$J(q,\Xi)=\alpha(\|Q_w-Q_w^a\|_E^2+\|Q_T-Q_T^a\|_D^2+\|Q_S-Q_S^a\|_D^2)+\|\chi\xi-\xi_{obs}\|_D^2+\|\chi T|_{z=0}-T_{obs}\|_D^2,$$

где $\alpha=const\ge 0$, χ — характеристическая функция множества D_1, $Q_w^a\in E$ и $Q_T^a,Q_S^a\in L_2(D)$ — заданные функции. Рассмотрим следующую задачу вариационной ассимиляции данных: найти элемент $\{q,\Xi\}\in M$, для которого

$$J(q,\Xi)=\inf_{\{q',\Xi'\}\in M}J(q',\Xi'). \tag{7}$$

Используя вытекающую из (6) априорную оценку, можно показать, что верна

Теорема 2. *При всех $\alpha>0$ и $\xi_{obs},T_{obs}\in L_2(D)$ задача (7) имеет решение.*

Автор благодарит В. И. Агошкова за полезные замечания. Работа выполнена в рамках проекта “Методы решения задач вариационного усвоения данных наблюдений и управления сложными системами” ОМН РАН и при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J. L., Temam R., Wang S.* On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. 1992. № 5. P. 1007–1053.
2. *Temam R., Ziane M.* Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam: Elsevier, 2004. V. 3.
3. *Агошков В. И., Ипатова В. М.* Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 1–3.