

УДК 517.946

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© Т. Ишанкулов

itolib@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Пусть D_ρ — ограниченная односвязная область на комплексной плоскости $z = x + iy$ с кусочно-гладкой границей, состоящей из угла

$$G_\rho = \left\{ \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2\rho} \right\}$$

и гладкой кривой S , лежащей внутри G_ρ ; $C_\alpha(E)$ — множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера на плоскости E ; $L_{p,2}(E)$ — множество функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(|z| \leq 1), |z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p(|z| \leq 1).$$

Через $u_{p,2}(A, B, D_\rho)$ обозначим множество решений в области D_ρ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где $A, B \in L_{p,2}(E) \cap C_\alpha(E)$, $p > 2$.

Рассматривается задача описания функций $\varphi \in (S)$, которые являются следами $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho)$. Обозначим через $X_j^\sigma(z, \zeta)$ ($j = 1, 2$) решения уравнения (1) по переменной z из класса $u_{p,2}(A, B, E)$, соответствующие по теореме взаимности [1] аналитическим функциям

$$\frac{1}{2}\Phi(z, \zeta), \quad \frac{1}{2i}\Phi(z, \zeta),$$

где Φ — функция Карлемана дуги S относительно области D_ρ [2]:

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \exp \{ \sigma [(-i\zeta)^\rho - (-iz)^\rho] \}.$$

Теорема 1. Пусть $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho) \cap (\bar{D}_\rho)$ и $w(z) = \varphi(z)$, $z \in S$. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:

$$w(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_S \Omega_1^\sigma(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2^\sigma(z, \zeta) \bar{\varphi}(\zeta) d\bar{\zeta}, \quad z \in D_\rho, \quad (2)$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \bar{\varphi}(\zeta) d\bar{\zeta} + \int_0^\infty I(z, \sigma) d\sigma, \quad z \in D_\rho, \quad (3)$$

где Ω_j — основные ядра Коши,

$$I(z, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \gamma_1^\sigma(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \gamma_2^\sigma(z, \zeta) \bar{\varphi}(\zeta) d\bar{\zeta},$$

$$\gamma_j^\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma} \Omega_j^\sigma, \quad \Omega_1^\sigma = X_1^\sigma + iX_2^\sigma, \quad \Omega_2^\sigma = X_1^\sigma - iX_2^\sigma.$$

Теорема 2. Пусть $\varphi \in L(S) \cap C(\overset{0}{S})$. Для того чтобы существовала функция $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho) \cap C(D_\rho \cup \overset{0}{S})$ такая, что ее сужение на $\overset{0}{S}$ совпадает с φ , необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\left| \int_0^\infty I(z, \sigma) d\sigma \right| \leq \infty$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \subset G_\rho$. Если это условие выполнено, то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (2) и (3).

Из теоремы 2 при $A(z) \equiv 0, B(z) \equiv 0, \rho = 1$ следует

Теорема (Фока – Кунни). Пусть $\varphi \in L(S) \cap C(\overset{0}{S})$. Для того чтобы существовала функция $w \in A(\bar{D}_1) \cap C(D_1 \cup \overset{0}{S})$ такая, что $w(z) = \varphi(z), z \in \overset{0}{S}$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\left| \int_0^\infty \int_S \varphi(\zeta) \exp[-i\sigma(\zeta - z)] d\zeta d\sigma \right| < \infty$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \subset \{\text{Im} z > 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
3. Фок В. А., Кунни Ф. М. О введении гасящей функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.