

УДК 517.962.22

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

© Г. М. Кадиров, Н. Раджабов *

* nusrat38@mail.ru

Таджикский государственный национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ — множество точек на вещественной оси, $c \in \Gamma$. На Γ рассмотрим следующее модельное уравнение второго порядка

$$y''(x) + \left[\frac{\alpha \operatorname{sgn}(x-c)}{|x-c|} + \frac{b_1}{|x-c|^\alpha} \right] y'(x) + \frac{b_1 y(x)}{|x-c|^{2\alpha}} = \frac{f(x)}{|x-c|^{2\alpha}}, \quad (1)$$

где $\alpha = \operatorname{const} > 1$, b_1, b_2 заданные постоянные числа, $f(x)$ — заданная функция, причем $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$.

Проблеме получения многообразия решений и исследованию граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1–5]. В настоящей работе в зависимости от корней характеристических уравнений

$$\lambda^2 - b_1 \lambda + b_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mu^2 + b_1 \mu + b_2 = 0 \quad (2)$$

для уравнения (1) получено представление многообразия решений через произвольные постоянные, которые используются для выяснения постановок задач типа Коши и их исследования, когда соответствующие условия заданы в особой точке.

В случае, когда корни уравнения (2) вещественные и разные, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть в уравнении (1) $\alpha > 1$, $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$. Корни уравнений (2) вещественные и разные. Кроме того, пусть $b_1 > \sqrt{b_1^2 - 4b_2} > 0$, $f(c-0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x) = 0 [\exp[-|\mu_2| \omega_c^\alpha(x)] (c-x)^\gamma], \quad \gamma > \alpha, \quad \text{при} \quad x \rightarrow c-0.$$

Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$ представимо в виде

$$y(x) = \begin{cases} K_{11}[c_1, c_2] + K_{12}[f], & \text{при} \quad a < x < c, \\ K_{21}[c_3, c_4] + K_{22}[f], & \text{при} \quad c < x < b, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}[c_1, c_2] &\equiv c_1 \exp[\mu_1 \omega_c^\alpha(x)] + c_2 \exp[\mu_2 \omega_c^\alpha(x)], \\ K_{12}[f] &\equiv \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_2}} \int_x^c \frac{\exp[\mu_1(\omega_c^\alpha(x) - \omega_c^\alpha(t))] - \exp[\mu_2(\omega_c^\alpha(x) - \omega_c^\alpha(t))]}{(c-t)^\alpha} f(t) dt \\ K_{21}[c_3, c_4] &\equiv C_3 \exp[\lambda_1 \omega_c^\alpha(x)] + C_4 \exp[\lambda_2 \omega_c^\alpha(x)], \\ K_{22}[f] &\equiv \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_2}} \int_c^x \frac{\exp[\lambda_1(\omega_c^\alpha(x) - \omega_c^\alpha(t))] - \exp[\lambda_2(\omega_c^\alpha(x) - \omega_c^\alpha(t))]}{(t-c)^\alpha} f(t) dt, \\ \lambda_1 &= \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}, \quad \mu_2 = -\lambda_1, \quad \mu_1 = -\lambda_2, \end{aligned}$$

$$\omega_c^\alpha(x) = [(\alpha - 1)|x - c|^{\alpha-1}]^{-1}, \quad c_j(j = \overline{1, 4}) \quad \text{произвольные постоянные числа.}$$

Когда корни уравнений (2) являются вещественными и разными, для уравнения (1) ставятся и исследуются следующие задачи типов Коши и линейного сопряжения.

ЗАДАЧА R_1 . Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим условиям в точке $x = c$.

$$\begin{cases} [P_{11}(y(x))]_{x=c-0} = A_{11}, & [P_{12}(y(x))]_{x=c-0} = A_{12}, \\ [P_{13}(y(x))]_{x=c+0} = A_{13}, & [P_{14}(y(x))]_{x=c+0} = A_{14}, \end{cases}$$

где

$$P_{11}(y(x)) = \exp[-\mu_1 \omega_c^\alpha(x)] [\mu_2 y(x) - (c - x)^2 y'(x)],$$

$$P_{12}(y(x)) = \exp[-\mu_2 \omega_c^\alpha(x)] [\mu_1 y(x) - (c - x)^2 y'(x)],$$

$$P_{13}(y(x)) = \exp[-\lambda_1 \omega_c^\alpha(x)] [\lambda_2 y(x) + (x - c)^2 y'(x)],$$

$$P_{14}(y(x)) = \exp[-\lambda_2 \omega_c^\alpha(x)] [\lambda_1 y(x) + (x - c)^2 y'(x)],$$

$A_{1j}(j = \overline{1, 4})$ заданные постоянные числа.

ЗАДАЧА R_2 . Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим условиям линейного сопряжения в точке $x = c$.

$$\sum_{k=1}^2 B_{jk} [P_{1k}(y(x))]_{x=c-0} + \sum_{k=3}^4 B_{jk} [P_{1k}(y(x))]_{x=c+0} = D_j, j = 1, 2, 3, 4,$$

где $B_{jk}(j, k = 1, 2, 3, 4)$, $D_j(j = 1, 2, 3, 4)$ — заданные постоянные числа.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение, подобное теореме 1, получено и в случаях, когда корни уравнений (2) являются вещественно равными и комплексно-сопряженными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задачи типов R_1 и R_2 ставятся и исследуются и в случаях, когда корни уравнений (2) являются вещественно равными и комплексно-сопряженными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение, подобное теореме 1, получено и в случаях, когда λ_1, λ_2 вещественно разные $b_1 < 0$, $|b_1| > \sqrt{b_1^2 - 4b_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rajabov N.* Linear conjugate boundary value problems for first order ordinary system of linear differential equations with singular or Super-singular coefficients // Proceedings of the second ISAAC Congress, Kluwer Academic Publishers. 2000. V. 1. P. 175–183.
2. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. Dushanbe: TSNU, 1998. 158 p.
3. *Раджабов Н., Кадиров Г. М.* К теории одного класса модельных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сверх-сингулярной точкой // Труды международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами (Душанбе, 25–28 октября 2003 г.). Душанбе, 2003. С. 128–130.
4. *Rajabov N.* Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary Differential Equations with singular coefficients // ICM 1998, Berlin, August 18–27, 1998. Abstract of short Communications and poster section. Berlin, 1998. P. 196.
5. *Rajabov N.* Higher order ordinary differential equations with super-singular points // Partial Differential and Integral Equations. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 347–358.