

УДК 517.96

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© Б. Т. Калимбетов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе на основе метода регуляризации [1] рассматривается слабо нелинейная сингулярно возмущенная задача

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_s^t \mu(\theta) d\theta \right) K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon f(y, t) + h(t),$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где оператор $A(t)$ содержит тождественные нулевые точки $\lambda(t) \equiv 0$ кратности $k - p < n$, n — размерность системы (1), $f(y, t)$ — многочлен по y , и предпринята попытка построить ее асимптотическое решение.

Задача о тождественной необратимости предельного оператора рассмотрена в работе [2], где была изучена задача Коши для системы дифференциальных уравнений со слабой нелинейностью, предельная система для которой, в отличие от (1), однородна. Кроме того, ненулевые точки спектра могли быть только в левой полуплоскости. Для решения построена асимптотика типа пограничного слоя. Сингулярно возмущенные системы с необратимым предельным оператором в случае, когда собственные значения могут быть чисто мнимыми, были рассмотрены в работе [3], где был предложен алгоритм построения регуляризованного асимптотического решения задачи. Основная трудность, возникающая при решении задач с вырожденным предельным оператором, заключается в том, что вырожденная система

$$0 = A(t)\bar{y} + h(t), \quad (2)$$

или не имеет решений вообще, или у нее их бесчисленное множество. Поэтому заранее не ясно, к какому решению системы (2) стремится истинное решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (1) (при $\varepsilon \rightarrow +0$). Это приводит к тому, что мы не можем с самого начала сказать, какие ограничения следует наложить на область определения функции $h(t)$, чтобы такая постановка была корректной. Естественно, эта трудность была бы преодолена, если бы нам удалось каким-нибудь образом найти предельное решение задачи (1). В 1976 г. И. С. Ломовым [4] эта трудность была преодолена сравнительно просто. Как известно, в этом случае система (2) разрешима, если выполнено условие $h \perp \text{Ker } A^*$ при каждом $t \in [0, T]$. Следует отметить, что если $h(t)$ не удовлетворяет этим условиям ортогональности, то решение задачи (1) при естественном предположении $\text{Re } \lambda \leq 0$ хотя и существует, но будет неограниченно возрастать при $\varepsilon \rightarrow +0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задачу (1) назовем *нерезонансной*, если существует целочисленный вектор $m \equiv |m_1, m_2, \dots, m_p|$ с $|m| \geq 2$, такой, что при некоторых $i \in \{1, 2, \dots\}$ имеет место тождества

$$(m, \lambda(t)) \neq \lambda_i(t), \quad |m| \geq 2, \quad i = \overline{1, p}, \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_p(t)$ — ненулевые собственные значения матрицы $A(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $f = (f_1(y, t), f_2(y, t), \dots, f_n(y, t))$ есть функция класса Ω , если каждая ее компонента разлагается в ряд

$$f_i(y, t) = \sum_{|m| \geq 0} f_i^{(m)}(t)(y - \varphi(t))^m \equiv \sum_{m_1 + \dots + m_n = 0} f_i^{(m_1, \dots, m_n)}(t)(y - \varphi_1(t))^{m_1} \dots (y - \varphi_n(t))^{m_n},$$

в котором $f_i^{(m)}(t) \in C^\infty[0, T]$, $|m| \geq 0$ и который сходится абсолютно и равномерно по $t \in [0, T]$ в полицилиндре $\Pi = \{y : |y_i - \varphi_i(t)| < R, i = \overline{1, p}, \forall t \in [0, T]\}$, где $R > 0$ — постоянная.

Регуляризованное асимптотическое решение задачи (1) строится в предположениях

1) $A(t) \in C^\infty([0, T], C^{n^2})$, $h(t) \in C^\infty([0, T], C^n)$, $K(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, C^{n^2})$, $f(y, t)$ — многочлен по y :

$$f(y, t) = \sum_{0 \leq |m| \leq l} f^{(m)}(t) y^m$$

с коэффициентами $f^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], C^n)$, $0 \leq |m| \leq l < \infty$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

$$\lambda_j(t) \neq 0, \quad j = \overline{1, p}; \quad \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, p}, \quad p < n;$$

$$\lambda_j(t) \equiv 0, \quad j = \overline{p+1, n}; \quad \operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0, \quad i = \overline{1, p};$$

3) $\lambda_{n+1}(t) \equiv \mu(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^1)$, $\lambda_{n+1}(t) \neq \lambda_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, $\forall t \in [0, T]$.

Доказываются нормальная и однозначная разрешимость итерационных задач и обосновывается сходимость формальных решений к точным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. Сафонов В. Ф. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной нелинейной задачи с нулевой точкой спектра предельного оператора // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 357. С. 95–97.
4. Ломов И. С. Регуляризация сингулярных возмущений по спектру предельного оператора // Вестн. МГУ. Сер. матем. мех. 1976. № 3. С. 6–13.