Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 178–179

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова *

* ulzada@list.ru

Центр физико-математических исследований МОН РК, Алматы, Казахстан

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi,\ -1 < t < 1\}$ рассматривается

Задача Коши. Найти решение уравнения

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=-1} = \tau(x), \quad u_t\big|_{t=-1} = \nu(x). \tag{2}$$

Известно [1], что задача (1), (2) относится классу некорректных задач. В работах [2, 3] рассматриваемая задача сведена к интегральным уравнениям первого рода и даны различные методы регуляризации этой задачи.

Пусть решение $u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega})$ существует и на боковых границах области Ω принимает значения

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(\pi,t) = \varphi_2(t), \tag{3}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ неизвестные функции. Тогда имеем смешанную задачу Коши (1)–(3). Предполагая выполненными условия

$$\tau(0) = \tau(\pi) = 0, \quad \nu(0) = \nu(\pi) = 0, \quad \varphi_j(-1) = \varphi_j'(-1) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{4}$$

после некоторой замены задача (1)–(3) принимает вид

$$Lu = \triangle w = g, \tag{5}$$

$$w\big|_{t=-1} = 0, \quad w_t\big|_{t=-1} = 0, \quad w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=\pi} = 0, \tag{6}$$

где

$$g = g(x,t) = f(x,t) - \tau''(x) - (t+1)\nu''(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1''(t) - \frac{x}{\pi}\varphi_2''(t).$$

Для задачи (5), (6) известны следующие утверждения [4].

Теорема 1. *Смешанная задача Коши (5), (6) сильно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{g_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 < \infty,$$

где

$$g_{km} = \left(g(x,-t), u_{km}(x,t)\right)_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

функции $u_{km}(x,t)$ являются собственными функциями спектральной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом

$$\triangle u_{km}(x,t) = \lambda_{km} u_{km}(x,-t), \tag{8}$$

$$u_{km}\big|_{x=0} = 0, \quad u_{km}\big|_{x=\pi} = 0, \quad \frac{\partial u_{km}}{\partial t}\bigg|_{t=-1} = 0, \quad u_{km}\big|_{t=-1} = 0. \tag{9}$$

Лемма. *Асимптотика собственных значений задачи (8), (9), не превосходящих* $\frac{1}{17}$, *при больших* k *имеет следующий вид*

$$\lambda_{k1} = 4k^2 e^{-2k}(1 + o(1)).$$

Введя обозначения $\mu(x,t) = (1+t)\nu(x)$, $\psi(x,t) = \frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1''(t) + \frac{x}{\pi}\varphi_2''(t)$ и определив число g_{k1} по формуле (7), имеем

$$\psi_{k1} = f_{k1} + k^2\tau_{k1} + k^2\mu_{k1} - \lambda_{k1} d_{k1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{где } d_{k1} = g_{k1}/\lambda_{k1}.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть функции* $\tau(x)$, $\nu(x) \in C^2([0,\pi])$, $\varphi_j(t) \in C^2([-1,1])$, $j = 1, 2$, *удовлетворяют условиям (4), где* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *— боковые данные, подлежащие определению. Решение задачи (1), (2) является ограниченным в* $L_2(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n} 2m b_{mn}^{+}\psi_{2m,1}\right|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n} (2m-1) b_{mn}^{-}\psi_{2m-1,1}\right|^2 < \infty\,,$$

где b_{mn}^{+}, b_{mn}^{-} *— определенные числа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамар Ж. С.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
2. *Тихонов А. Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023–1026.
3. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
4. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. Алматы. 2006. № 1(48). С. 36–44.