

УДК 517.43

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Операторы вида

$$L(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \dots + \lambda A_{n-1} + A_n,$$

где A_i — операторы, $i = \overline{0, n}$, называются пучками.

Пучки с вполне непрерывными коэффициентами изучались в работах [1, 2]. В работе [1] изучена природа спектра и получены теоремы полноты. В работе [2] изучен квадратичный пучок ($n=2$) и указано его приложение к задачам механики.

В связи с этими работами возникает вопрос: "А как меняются спектральные свойства пучка, если коэффициенты окажутся неограниченными операторами?"

Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB : 0 \leq t \leq T, x = 0; \quad BC : 0 \leq x \leq l, t = T; \quad CD : 0 \leq t \leq T, x = l; \quad DA : 0 \leq x \leq l, t = 0.$$

Через $C^{4,2}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x, t)$ четырежды непрерывно дифференцируемых по x и дважды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω . Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

ЗАДАЧА. Изучить спектральные свойства пучка

$$L(\lambda)u = u_{tt}(x, t) - 2\lambda u_{xx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + \lambda^2 u(x, t), \quad (1)$$

$$DL(\lambda) = \{u \in C^{4,2}(\Omega) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega}); \quad u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u_t(x, T) + u_{xx}(x, 0) = 0, \\ u_t(x, T - t) + u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_t(l, T - t) + u_{xx}(l, t) = 0\}. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Нетривиальный элемент $u(x, t)$ пространства $L^2(\Omega)$, удовлетворяющий уравнению

$$L(\lambda)u = 0,$$

назовем собственным вектором пучка, а значение параметра λ , соответствующее этому собственному вектору, собственным значением пучка.

2. Полученные результаты.

Теорема. Пучок (1), (2) имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. LXXVII, № 1. С. 11–14.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 496 с.