

УДК 517.929

О ВЛИЯНИИ МЛАДШЕГО ЧЛЕНА НА КОРРЕКТНУЮ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB : 0 \leq t \leq T, x = 0; \quad BC : 0 \leq x \leq l, t = T; \quad CD : 0 \leq t \leq T, x = l; \quad DA : 0 \leq x \leq l, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω . Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ и a — константа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под регулярным решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2), (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u(x, t) \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи (1)–(3), если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Краевая задача (1)–(3) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ и единственно.

Целью настоящей работы является исследование влияния младшего члена на сильную разрешимость краевой задачи (1)–(3) в пространстве $L^2(\Omega)$.

2. Основные результаты.

Основными результатами наших исследований являются следующие теоремы 1, 2.

Теорема 1. Спектральная задача

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = \lambda u(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^2 + \frac{2m\pi i}{l} \cdot a, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

Теорема 2. Если $\operatorname{Re} a \neq 0$, то существует обратный оператор $\bar{L}^{-1}$, который является нормальным и компактным. Имеет место оценка

$$\|\bar{L}^{-1}\| \leq K^{-1}, \quad K = \max\left\{\frac{\pi}{2T}, \frac{2\pi}{l}|\operatorname{Re} a|\right\}.$$

Спектр оператора $\bar{L}$ дискретен, т. е. не имеет предельных точек на конечной части плоскости.

Если $\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a \neq \frac{(-1)^n(n + \frac{1}{2})}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ и обе величины $\frac{2\pi T}{l^2}$, $\frac{T \cdot \operatorname{Im} a}{l}$ рациональны, то обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ существует, ограничен, но некомпактен. Оператор $\bar{L}$ самосопряжен, его спектр состоит из счетного множества собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$. Точки непрерывного спектра являются предельными точками собственных значений.

Если $\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a \neq \frac{(-1)^n(n + \frac{1}{2})}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ и хотя бы одна из двух величин $\frac{2\pi T}{l^2}$, $\frac{T \cdot \operatorname{Im} a}{l}$ иррациональна, то обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ существует, но неограничен. Оператор $\bar{L}$ самосопряжен и его спектр состоит из счетного множества собственных значений, среди которых имеется счетное множество бесконечнократных собственных значений.

Если $\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a = \frac{(-1)^n(n + \frac{1}{2})}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ для некоторых значений $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, то обратный оператор не существует. Оператор $\bar{L}$ является самосопряженным. Если обе величины $\frac{2\pi T}{l^2}$, $\frac{T \cdot \operatorname{Im} a}{l}$ рациональны, то спектр состоит из счетного множества собственных значений, среди которых имеется счетное множество бесконечнократных собственных значений. Если хотя бы одна из двух величин $\frac{2\pi T}{l^2}$, $\frac{T \cdot \operatorname{Im} a}{l}$ иррациональна, то спектр оператора $\bar{L}$ заполняет всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977. 357 с.
4. Вейль Г. Избранные труды. М.: Наука, 1984. 510 с.