Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 183–184

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ – НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, М. Т. Шоманбаева *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB: 0 \le t \le T, x = 0$; $BC: 0 \le x \le l, t = T$; $CD: 0 \le t \le T, x = l$; $DA: 0 \le x \le l, t = 0$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача Коши – Неймана. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{t=0} = u_x\,|_{x=0} = u_x\,|_{x=l} = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$.

Определение 1.1. Под *регулярным решением* задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1.1) и краевые условия (1.2) [1].

Определение 1.2. Функцию $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ назовем *сильным решением* задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \to \infty$ [1].

2. Полученные результаты

Теорема 2.1. *Спектральная задача*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t), \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \tag{2.2}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2 \dots, \tag{2.3}$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, *где* $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

Теорема 2.2. *(a) Для единственности сильного решения краевой задачи*

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{2.5}$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \tag{2.6}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \quad \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots$$

(б) Для существования сильного решения краевой задачи (2.5)–(2.6) необходимо и достаточно

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty,$$

где λ_{mn} *и* u_{mn} *— из* (2.3) *и* (2.4), $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L^2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.