

УДК 517.98

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© Б. Е. Кангужин

kanbalt@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Пусть $b < \infty$, $n < \infty$, $p_k(x) \in C^k[0, b]$, $k = 0, \dots, n-2$. В функциональном пространстве $L_2[0, b]$ рассмотрим дифференциальный оператор L

$$L y = l(y) \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x)$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^n[0, b] : y^{(s)}(0) = \int_0^b l(y) \sigma_{s+1}(x) dx, \quad s = 0, \dots, n-1 \right\},$$

где граничные функций $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x) \in L_2[0, b]$.

Известно, что существует ограниченный обратный оператор L^{-1} . Дифференциальный оператор, на самом деле, в общем случае задается набором $2n-2$ функции:

$\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x) \in L_2[0, b]$ — граничные функции,

$p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-2}(x)$ — коэффициенты дифференциального выражения.

Обратная задача спектрального анализа: по спектральным данным определить коэффициенты дифференциального выражения и граничные функции. По каким спектральным данным можно (однозначно) восстановить оператор?

Для определения таких данных обычно поступают следующим образом: надо написать теорему разложения по корневым функциям исходного оператора для достаточно широкого класса функции и те данные, которые входят в эти разложения решают обратную задачу.

Покажем, что указанные разложения записываются через матричную спектральную функцию распределения. В этом состоит цель первой части настоящей работы.

Пусть $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения $l(y) = \lambda y(x)$, подчиненная данным Коши в нуле: $y_k^{(s)}(0) = \delta_{k,s+1}$. Здесь $\delta_{k,s+1}$ — символ Кронекера. Введем необходимые для дальнейшего выражения по формулам:

$$\Delta(\lambda) = \det[\delta_{kj} - \lambda \langle y_k, \sigma_j \rangle],$$

$$\kappa_1(x, \lambda), \kappa_2(x, \lambda), \dots, \kappa_n(x, \lambda) : l(\kappa_s) = \lambda \kappa_s, \kappa_s^{(j)}(0) = \lambda \langle \kappa_s, \sigma_{j+1} \rangle,$$

$$\Omega_1(x, \lambda), \dots, \Omega_n(x, \lambda) : l^+(\Omega_k) = \lambda \Omega_k + \sigma_k(x),$$

$$M_k(x, \lambda) = \sigma_k(x) + \lambda \Omega_k(x, \lambda),$$

$$\lambda_m, k_m : \Delta(\lambda_m) = 0, \Delta^{(1)}(\lambda_m) = 0, \dots, \Delta^{(k_m-1)}(\lambda_m) = 0,$$

$$\Delta^{(k_m)}(\lambda_m) \neq 0,$$

$$d_{m,j} = \frac{1}{j!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_m} \frac{d^j}{d\lambda^j} \frac{(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}{\Delta(\lambda)}, \quad D_m = [d_{i,j}],$$

$$\vec{M}_{km}(\xi) = \left[M_k(\xi, \lambda_m), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} M_k(\xi, \lambda_m), \dots, \frac{1}{(k_m - 1)!} \frac{\partial^{k_m - 1}}{\partial \lambda^{k_m - 1}} M_k(\xi, \lambda_m) \right],$$

$$\vec{\kappa}_{km}(\xi) = \left[\kappa_k(\xi, \lambda_m), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \kappa_k(\xi, \lambda_m), \dots, \frac{1}{(k_m - 1)!} \frac{\partial^{k_m - 1}}{\partial \lambda^{k_m - 1}} \kappa_k(\xi, \lambda_m) \right],$$

$$S_{k,t}^{(m)} = \left\langle \vec{\kappa}_{km}^T(\xi), \vec{M}_{tm}(\xi) \right\rangle,$$

$$\sigma_{kt}^{(m)} = D_m S_{kt}^{(m)} D_m.$$

Теорема. Пусть оператор L обладает базисной в $L_2[0, b]$ системой корневых функции. Тогда существует матричная функция распределения $\left\{ \sigma_{kt}^{(m)}, \quad k, t = 1, \dots, n, \quad \lambda_m \in \sigma(L) \right\}$ такая, что справедливы формулы

$$\varphi_j(\lambda) = \langle M_j(\xi, \lambda), f(\xi) \rangle,$$

$$f(x) = \sum_{\lambda_m \in \sigma(L)} \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \left\langle \vec{M}_{km}, f \right\rangle \sigma_{kt}^{(m)} \vec{\kappa}_{tm}^T(x).$$

Причем верен аналог равенства Парсеваля

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\lambda_m \in \sigma(L)} \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n \left\langle \vec{M}_{km}, f \right\rangle \sigma_{kt}^{(m)} \langle \vec{\kappa}_{tm}^T(x), g \rangle.$$

Таким образом, в формулировке теоремы фигурируют собственные значения $\{\lambda_m\}$ исходного оператора и матричная функция распределения $\left\| \sigma_{kt}^{(m)} \right\|$, которые называем спектральными данными исходного дифференциального оператора.

В данном пункте рассматривается обратная задача спектрального анализа. По спектральным данным дифференциального оператора надо найти его коэффициенты и набор соответствующих граничных функций. Коэффициентные обратные задачи для отдельных классов дифференциальных операторов более-менее изучены. Новым моментом является восстановление граничных функций. Поэтому в настоящей работе исследуется восстановление граничных функций. Пусть $b < \infty$, $n < \infty$. В $L_2[0, b]$ рассмотрим оператор L

$$Ly = l(y) \equiv y^{(n)}$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^n[0, b] : y^{(s)}(0) = \int_0^b l(y) \sigma_{s+1}(x) dx, \quad s = 0, \dots, n-1 \right\},$$

где $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x) \in L_2[0, b]$.

Из теоремы следует существование матричной функции распределения $\left\{ \sigma_{kt}^{(m)}, \quad k, t = 1, \dots, n, \quad \lambda_m \in \sigma(L) \right\}$, для которой справедлива теорема о разложении при некоторых дополнительных условиях. Рассмотрим задачу восстановления оператора L по матричной функции распределения. В работе указан аналог процедуры Гельфанда – Левитана решения задачи восстановления.