

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© В. В. Карачик

karachik@math.susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение. В 1899 г. Альманси [1] доказал следующее замечательное утверждение: если $f(x)$ полигармоническая функция порядка m в звездной области Ω с центром в начале координат, тогда существуют единственные функции $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ гармонические в Ω такие, что $f(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + \dots + |x|^{2(m-1)} u_{m-1}(x)$. Основываясь на свойствах гармонических полиномов $G_{(\nu)}(x)$, введенных в [5], распространим это утверждение на аналитические функции действительных переменных (теорема 1). Этот результат будет уточнен в теоремах 2 и 3, где даются формулы нахождения функций $u_k(x)$. Следует заметить, что в [2] (Теорема 2.2) формула Альманси была уже распространена на голоморфные функции. Оказалось, что полученная ниже формула (5) несколько отличается от формулы (2.9), найденной в [2]. Интересные свойства полигармонических функций, опирающиеся на формулу Альманси, были получены А. В. Бицадзе в [3]. Формулы, задающие взаимно однозначное соответствие между гармоническими в Ω функциями и решениями уравнения Гельмгольца в Ω , полученные в примере, совпадают, с ранее найденными И. Н. Векуа в [4].

1. Представление аналитических функций. Рассмотрим полиномы следующего вида, введенные в [4]

$$G_k^s(x_{(n)}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{|x_{(n-1)}|^{2i} x_n^{k-2i, !}}{(2, 2)_i (n-1+2s, 2)_i}, \quad (1)$$

где $(a, b)_k = a(a+b) \dots (a+kb-b)$ — обобщенный символ Похгаммера, причем следует считать, что $(a, b)_0 = 1$, $t^{m, !}$ — факториальная степень $t^{m, !} = t^m/m!$, а $[a]$ — целая часть числа a . В [4] установлено, что произведение полиномов вида (1) дает гармонические полиномы, названные G -полиномами

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) \dots G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n}(x_{(2)}) x_1^{\nu_n}, \quad (2)$$

где $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n$ и $\nu_n = 0, 1$. Эти полиномы составляют базис среди гармонических полиномов и они ортогональны на единичной сфере. Используя оценки для полиномов $G_{(\nu)}(x_{(n)})$ [5], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $f(x)$, аналитической в начале координат, существуют гармонические функции $u_0(x), \dots, u_n(x), \dots$, определенные в некоторой окрестности начала координат $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^{2k} u_k(x)$, $x \in \mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство не является конструктивным так же, как и формула Альманси. Оно опирается лишь на оценки для полиномов (2) и не позволяет строить гармонические функции $u_k(x)$ по известной функции $f(x)$.

2. Полигармонические функции. Рассмотрим область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, обладающую свойством звездности $\forall x \in \mathcal{D}, \forall t \in [0, 1] \quad tx \in \mathcal{D}$ и определим на ней следующую последовательность функций:

$$G_k(x; u) = \begin{cases} u(x), & k = 0, \\ \frac{1}{4^k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} u(\alpha x) d\alpha, & k > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $u(x)$ некоторая гармоническая в $\mathcal{D}$ функция. Система функций $\{G_k(x; u) \mid k = 0, 1, \dots\}$ является 0-нормированной относительно оператора Δ в $\mathcal{D}$ [6], т.е. в области $\mathcal{D}$ верны равенства $\Delta G_k(x; u) = G_{k-1}(x; u)$ и $\Delta G_0(x; u) = 0$.

Сначала на основании свойств функций (3) устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2. Для любой полигармонической в звездной области $\mathcal{D}$ функции $P(x)$ имеет место представление $P(x) = G_0(x; v_0) + G_1(x; v_1) + \dots + G_m(x; v_m)$, где гармонические функции $v_0(x), \dots, v_m(x)$ находятся из равенства

$$v_k(x) = \Delta^k P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}}{4^s s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta^{k+s} P(\alpha x) d\alpha,$$

при $k = 0, \dots, m$.

Обобщением данного результата является следующая теорема.

Теорема 3. Для любой функции $f(x)$, аналитической в начале координат имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(x; v_i) \equiv v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_k(\alpha x) d\alpha, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (4)$$

в котором гармонические функции $v_0(x), \dots, v_n(x), \dots$ определены в некоторой звездной области $\mathcal{D}$ с центром в начале координат и задаются формулой

$$v_k(x) = \Delta^k f(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s}}{4^s s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1} \alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta^{k+s} f(\alpha x) d\alpha. \quad (5)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

в звездной области Ω . Разложим его решение в формулу (4). Вычислим функции $v_k(x)$ из (5). Верно равенство

$$v_k(x) = (-\lambda)^k \left(v(x) + \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4(-\lambda\alpha(1-\alpha)|x|^2) \alpha^{n/2-1} v(\alpha x) d\alpha \right) = (-\lambda)^k u(x),$$

где обозначено

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{(2, 2)_k (m, 2)_k}, \quad u(x) = v(x) + \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4(-\lambda\alpha(1-\alpha)|x|^2) v(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (6)$$

Тогда формула (4) примет вид

$$v(x) = u(x) - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4(\lambda(1-\alpha)|x|^2) u(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7), задающие взаимно однозначное соответствие между гармоническими в Ω функциями и решениями уравнения Гельмгольца, после некоторых преобразований, совпадают с ранее полученными И. Н. Векуа в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Almansi E.* Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}u = 0$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1899. V. 3, N 2. P. 1–51.
2. *Aronszajn N., Creese M. T., Lipkin L. J.* Polyharmonic Functions. Oxford Univ. Press, New York, 1983.
3. *Буцадзе А. В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
4. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
5. *Karachik V. V.* On some special polynomials // Proceedings of AMS. 2004. V. 132. P. 1049–1058.
6. *Karachik V. V.* Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V. 287, N 2. P. 577–592.