Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 337–338

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

© Ш. Б. Халилов

shavkat58@mail.ru

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^n$. Рассмотрим в полупространстве $R^4_+ = \{(t,x) \in R^4 : x \in R^3, 0 < t < \infty\}$ относительно вектор-функции $U = (u, v, w)$ систему дифференциальных уравнений

$$-U_{tt} - \triangle U + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \mu \frac{\partial}{\partial t}(U_t + \operatorname{rot} U) = 0, \qquad (1)$$

которая зависит от вещественных параметров λ и μ. Эта система при $(\lambda-1)(\mu-1) > 0$ является эллиптической по Петровскому. При $\lambda < 1$ и $\mu < 1$ она является сильно эллиптической, при $\lambda > 1$ и $\mu > 1$ не является сильно эллиптической, а при $\lambda = \mu = 2$ превращается в систему В. И. Шевченко [1], представляющей собой пример эллиптической системы трех уравнений в четырехмерном пространстве, для которой нарушается нетеровость задачи Дирихле. Когда $(\lambda - 1)(\mu - 1) \leq 0$ система (1) перестанет быть эллиптической. В этом случае было доказано в [2], что задача Дирихле для этой системы в полупространстве R^4_+ при любых значениях $\lambda > 1$ и $\mu > 1$ не является нетеровой, т. е. система (1) является сильно связанной [3].

При $\lambda = \mu = 1$ характеристический определитель системы (1) обращается в нуль, т. е. тип системы вырождается, и в этом случае нами было доказано, что задача Дирихле является переопределенной и для корректности поставленной задачи на границе полупространства R^4_+ достаточно задавать значение одной из компонент искомой вектор-функции $U(t,x)$.

Настоящая работа посвящена определению корректно поставленной задачи в случаях $(\lambda - 1)(\mu - 1) \leq 0$, когда хотя бы один из параметров λ или μ не равен 1.

Пусть $\mu \neq 1$ и $\lambda = 1$. Тогда $(\lambda-1)(\mu-1) = 0$ и характеристический определитель системы имеет вид:

$$\sigma(\tau, \xi) = (\mu - 1)\tau^2[\tau^2 + |\xi|^2][(\mu - 1)^2\tau^2 + |\xi|^2], \qquad (2)$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Здесь при $\tau = 0$ $\sigma(\tau, \xi) = 0$ и система (1) при $t = 0$ вырождается в систему

$$-\triangle U + \operatorname{grad} \operatorname{div} U = 0,$$

характеристический определитель которой тождественно равен нулю. Она эквивалентна двум системам уравнений первого порядка

$$U_t + \operatorname{rot} U = \Phi, \quad (\mu - 1)\Phi_t + \operatorname{rot} \Phi = 0,$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $\mu \neq 1$ и $\lambda = 1$, то регулярные решения системы (1) в R^4_+ всегда существуют. Если*

$$v(0,x) = f_1(x), \qquad w(0,x) = f_2(x),$$

$$v_t(0,x) = g_1(x), \qquad w_t(0,x) = g_2(x),$$

где $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C^3(R^3)$ и на бесконечности $f_i(x) = O(|x|^{-2})$, $g_i(x) = O(|x|^{-1})$, $i = 1,2$, то это решение единственно.

При $\mu = 1$ и $\lambda \neq 1$ характеристический определитель системы принимает вид

$$\sigma(\tau, \xi) = (\lambda - 1)|\xi|^4(\tau^2 + |\xi|^2).$$

В этом случае система является системой составного типа и для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\mu = 1$ *и* $\lambda \neq 1$, *то при* $\lambda \neq 0$ *регулярные решения системы* (1) *не существуют, а если* $\lambda = 0$ *необходимо на границе полупространства* R^4_+ *задавать одну из компонент искомой вектор-функций* $U(t, x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко В. И.* // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 6. С. 1300–1302
2. *Янушаускас А. И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, 1979. 192 с.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. *Халилов Ш. Б.* // Докл. АН РТ. 2006. Т. 49, № 4. С. 311–315.