Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 339–340

УДК 517.956

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 6-го ПОРЯДКА

© В. Н. Ханхасаев

hanhvladnick@mail.ru

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ

В ограниченной односвязной области $D \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей Γ рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных 6-го порядка:

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{n} L_i^* A_i\left(x, D_\beta u, L_j u\right) + \sum_{|\alpha|\le 2} D_\alpha^* B_\alpha\left(x, D_\beta u, L_j u\right) = h(x), \tag{1}$$

$$|\beta| \le 2, \quad j = \overline{0,n}, \quad L_0 = K, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} K, \quad i = \overline{1,n}, \quad D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u|_\Gamma = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = f_2(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = f_3(x), \tag{2}$$

где K — произвольный линейный дифференциальный оператор в частных производных 2 порядка с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющий неравенству

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \ge \alpha_1 \|u\|_{W_r^2(D)}, \quad m, r \ge 2, \tag{3}$$

для любых функций $u(x) \in C_K$ — классу трижды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе Γ вместе с первой производной по нормали; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ; Γ_0 — часть границы Γ, совпадающая с характеристической поверхностью оператора K.

Определим банаховы пространства H_+ и $H_\bigoplus$ с нормами

$$\|u\|_+ = \|Ku\|_{W_m^1(D)}, \quad \|u\|_\bigoplus = \|Ku\|_{W_m^1(D)} + \|u\|_{W_e^2(D)}, \quad e \ge 2,$$

полученные замыканием по этим нормам множества функций

$$C_L = \left\{ u \in C_K : \frac{\partial u^2}{\partial \nu^2}|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Из (3) следует, что $\|\cdot\|_+$ — действительно норма, и пространства H_+ и $H_\bigoplus$, очевидно, сепарабельны. Можно показать также, что они рефлексивны и для них имеет место следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $u(x) \in C_K$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует α_2 такое, что выполнено неравенство*

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \ge \alpha_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma\setminus\Gamma_0 : \rho(x, \Gamma_0) > \varepsilon\}. \tag{4}$$

Из теорем вложения пространств Соболева и неравенства (3) непосредственно следует, что краевые условия класса функций C_K выполняются и для функций из пространств H_+ и $H_\bigoplus$.

После введения непрерывного оператора следа для второй производной по нормали на $\Gamma\backslash\Gamma_0$ и продолжения его по непрерывности на пространство H_+ получаем, что по неравенству (4) дополнительное краевое условие класса функций C_L наследуется и для пространства H_+, т. е. для функций из H_+ выполнены однородные краевые условия (2).

Предположим, что функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ из (2) допускают продолжение f(x) внутрь области D из пространства $W_m^3(D)\bigcap W_k^2(D)$, где $k=\max(r,e)$. Тогда совокупность функций вида $u(x)=z(x)+f(x)$, где $z(x)\in H_+(H_{\bigoplus})$, образует пространство $H_+(f)(H_{\bigoplus}(f))$.

Вводя обычные определения слабого и сильного обобщенных решений первой краевой задачи (1), (2), где $H_-(H_\Theta)$ — негативные пространства к $H_+(H_{\bigoplus})$, построенные относительно гильбертова пространства $L_2(D)$, и накладывая ряд предположений (1^0-5^0) для различных уравнений вида (1), означающих условия на поведение нелинейных функций $A_i,\ B_\alpha(x,\xi_\beta,\eta_j)$, $i,j=\overline{0,n}$, $|\alpha|,|\beta|\leq 2$, доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если выполнены предположения* (1^0-3^0), *то первая краевая задача (1), (2) для любой функции* $h(x)\in H_-(H_\Theta)$ *имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение из пространства* $H_+(f)(H_{\bigoplus}(f))$. *Если выполнены предположения* $(1^0,2^0,4^0)$, *то это решение единственно, а при выполнении* $(1^0,2^0,5^0)$ *слабое решение совпадает с сильным, т. е. отображение*

$$L:H_+(f)\to H_-\quad (L:H_{\bigoplus}(f)\to H_\Theta)$$

есть гомеоморфизм.