

УДК 517.946

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

© А. Б. Хасанов, А. А. Рейимберганов

ahasanov2002@mail.ru, anwar2006@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} iu_t + 2u|u|^2 + u_{xx} = i \sum_{k=1}^{2N} (\phi_{k1}^2 - \phi_{k2}^{*2}), \\ L\phi_k = \xi_k \phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad x \in R^1, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \quad (2)$$

где $\phi_k = (\phi_{k1}, \phi_{k2})^T$ — собственные вектор-функции оператора

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x, t) \\ -u^*(x, t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

соответствующие собственным значениям ξ_k ($\Im \xi_k > 0$), такие, что $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k1} \phi_{k2} dx = A_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$. Здесь $A_k(t)$ — заданные непрерывные, ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям $A_k(t) = A_n^*(t)$ при $\xi_k = \xi_n^*$.

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x) - \rho e^{i\theta}| dx < \infty, \quad \rho, \theta \in R_+^1, \quad (3)$$

2) Оператор $L(0)$ не имеет спектральных особенностей и в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$.

Предполагаем, что функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u(x, t) - \rho e^{i\theta + 2i\rho^2 t}| + \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (4)$$

Основная цель работы — получить представления для решений $u(x, t)$, $\phi_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$ задачи (1)–(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

При выполнении условия (4) существуют решения Йоста системы уравнений $L(t)Y = \xi Y$ со следующими асимптотиками

$$\psi(x, \xi, p) \sim \left(\frac{i}{\rho} (\xi - p) e^{i\theta + 2i\rho^2 t} \right) e^{ipx}, \quad \hat{\psi}(x, \xi, p) \sim \left(\frac{1}{\rho} (\xi - p) e^{-i\theta - 2i\rho^2 t} \right) e^{-ipx} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(x, \xi, p) \sim \left(\frac{1}{\rho} (\xi - p) e^{-i\theta - 2i\rho^2 t} \right) e^{-ipx}, \quad \hat{\varphi}(x, \xi, p) \sim \left(\frac{i}{\rho} (\xi - p) e^{i\theta + 2i\rho^2 t} \right) e^{ipx} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

где $p = \sqrt{\xi^2 + \rho^2}$. При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \hat{\varphi}\}$ и $\{\psi, \hat{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений $LY = \xi Y$, поэтому $\varphi = a(\xi, p)\bar{\psi} + b(\xi, p)\psi$.

Функция $a(\xi, p)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет там конечное число нулей $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)$. Невещественные нули $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ функции $a(\xi, p)$ соответствуют собственным значениям оператора $L(t)$ в верхней полуплоскости $\Im \xi > 0$. Предполагаем, что все собственные значения оператора L простые.

Для функции ψ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi = \left(\frac{i}{\rho} (\xi - p) e^{i\theta + 2i\rho^2 t} \right) e^{ipx} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_{11}(x, s, t) & K_{12}(x, s, t) \\ K_{21}(x, s, t) & K_{22}(x, s, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \rho \end{pmatrix} (\xi - p) e^{i\theta + 2i\rho^2 t} e^{ips} ds. \quad (5)$$

В представлении (5) ядро не зависит от ξ и имеет место равенство

$$u(x, t) - \rho^{i\theta + 2i\rho^2 t} = 2K_{12}(x, x, t).$$

Компоненты ядра при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$-\frac{2i}{\rho} e^{-i\theta} \begin{pmatrix} K_{12}(x, y, t) \\ K_{11}^*(x, y, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x + y, t) \\ F_2(x + y, t) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_{11}(x, s, t) & K_{12}(x, s, t) \\ -K_{12}^*(x, s, t) & K_{11}^*(x, s, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s + y, t) \\ F_2(s + y, t) \end{pmatrix} ds = 0,$$

где

$$F_1 = \frac{i}{\rho} e^{i\theta} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n (\xi_n - p_n) e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \mu_n^* (\xi_n^* + p_n^*) e^{-ip_n^* z} \right) - \frac{i}{\rho} e^{i\theta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [r(\xi, p) - r(-\xi, p)] e^{ipz} dp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [r(\xi, p) - r(-\xi, p)] e^{ipz} d\xi \right),$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^N \mu_n e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \mu_n^* e^{-ip_n^* z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\xi, p) - r(-\xi, p)}{p} e^{ipz} d\xi, \quad r(\xi, p) \equiv \frac{b(\xi, p)}{a(\xi, p)},$$

$$\mu_n = \frac{i}{p_n} \frac{C_n}{a'(\xi_n, p_n)}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(x, t)$, ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, 2N$ являются решением задачи (1)–(4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad \frac{dC_n}{dt} = (4i\xi_n p_n - 2i\rho^2 + A_n(t))C_n, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \frac{dr}{dt} = (4i\xi p - 2i\rho^2)r, \quad (\Im \xi = 0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
2. Yan-Chow Ma. The perturbed plane-wave solutions of the Cubic Schrodinger Equation // Studies in Applied Mathematics. 1979. № 60. P. 43–58.
3. Mel'nikov V. K. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source // Inverse Probl. 1992. V. 8. P. 133–147.