Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 343–345

УДК 517.946

О КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КдФ С ИСТОЧНИКОМ

© А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов

ahasanov2002@mail.ru, x_umid@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C^l_{m_j-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l}\right), \tag{1}$$

$$L\varphi_j^l = k_j^2\varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1}, \quad (Im\, k_j > 0),\ \ j=\overline{1,N},\ \ l=0,1,\dots,m_j-1, \tag{2}$$

где $C_n^l = \dfrac{n!}{(n-l)!l!}$, $L(t) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$, функции $\varphi_j^l(x,t)$ при любом неотрицательном t принадлежат пространству квадратично суммируемых функций $L_2(-\infty,\infty)$, а $\varphi_j^0(x,t)$ — собственные функции оператора $L(t)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_j(t) = k_j^2(t)$ $(Im\, k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $j=1,2,\dots,N$, $l=0,1,\dots,m_j-1$.

Система нелинейных уравнений (1)–(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in R, \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|\, e^{\varepsilon|x|}dx < \infty, \tag{4}$$

2) оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0),\lambda_2(0),\dots,\lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),\dots,m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_j^{m_j-1}(x,t)\varphi_j^{m_j-1-l}(x,t)\right)dx = A^j_{m_j-1-l}(t),$$

где $A^j_{m_j-1-l}(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t, $j=1,2,\dots,N$, $l=0,1,\dots,m_j-1$.

Пусть функция $u(x,t) = \Re u(x,t) + i\Im u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| e^{\varepsilon|x|}\right)dx < \infty, \quad j=0,1,2,3.$$

Основная цель данной работы — получить представления для решений $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j=1,2,\dots,N$, $l=0,1,\dots,m_j-1$, задачи (1)–(3) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Метод обратной задачи рассеяния ведёт начало с работы [1]. Возможность применения этого метода к эволюционным уравнениям с самосогласованными источниками показана в работах [2–3].

Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал $u(x,t)$ является комплекснозначным. Хорошо известно, что несамосопряженный оператор $L(t)$ может иметь спектральные особенности, которые лежат на непрерывном спектре. Мы предполагаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей. Кроме того, при выполнении вышеуказанных условий оператор $L(t)$ имеет конечное число собственных значений.

Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля

$$-y''+u(x)y=\lambda y,\quad \lambda=k^2,\quad x\in(-\infty,\infty), \tag{5}$$

где $u(x)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (4). При выполнении условия (4) существуют решения Йоста уравнении (5) со следующими асимптотиками на бесконечности при $\Im k>-\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$e_+(x,k)\sim e^{ikx},\ \ x\to+\infty\,;\quad e_-(x,k)\sim e^{-ikx},\ \ x\to-\infty.$$

Пары функций $\{e_+(x,k),e_+(x,-k)\}$ и $\{e_-(x,k),e_-(x,-k)\}$ образуют в полосе $|\Im k|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ фундаментальные системы решений, поэтому

$$e_-(x,k)=\frac{v(k)}{2ik}e_+(x,k)+\frac{\omega(k)}{2ik}e_+(x,-k),$$

где $\omega(k)=W\{e_-(x,k),e_+(x,k)\}$, $v(k)=W\{e_+(x,-k),e_-(x,k)\}$. Пусть $k_1,k_2,\dots,k_N$ — невещественные нули $\omega(k)$, тогда $\lambda_j=k_j^2$, $j=1,2,\dots,N,$ суть собственные значения оператора L. Кратность корня k_j уравнении $\omega(k)=0$ обозначим через m_j $(j=\overline{1,N})$.

Существуют так называемая нормировочная цепочка чисел $\{\theta_0^j,\theta_1^j,\dots,\theta_{m_j-1}^j\}$, $j=\overline{1,N}$ таких, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s\,!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s e_-(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2}=\sum_{\nu=0}^{s}\theta_{s-\nu}^j\frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^v e_+(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2},\ j=\overline{1,N},\ \ s=\overline{0,m_j-1}.$$

Набор $\{S(k),\lambda_j,\theta_0^j,\theta_1^j,\dots,\theta_{m_j-1}^j,\ j=\overline{1,N}\}$ называется данными рассеяния для уравнения (5). В работах [4–5] показано, что по данным рассеяния потенциал $u(x)$ восстанавливается однозначно.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Если функции $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j=1,2,\dots,N$, $l=0,1,\dots,m_j-1$, являются решением задачи (1) – (6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом*

$$\frac{dS}{dt}=8i\lambda^{3/2}S,\quad \left(|Imk|<\frac{\varepsilon}{2}\right),\qquad \frac{d\lambda_n}{dt}=0,$$

$$\frac{d\theta_0^n}{dt}=(8i\lambda_n^{3/2}+A_0^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_1^n}{dt}=(8i\lambda_n^{3/2}+A_0^n(t))\theta_1^n+(12i\lambda_n^{1/2}+A_1^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_2^n}{dt} = (8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t))\theta_2^n + (12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t))\theta_1^n + (3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_3^n}{dt} = (8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t))\theta_3^n + (12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t))\theta_2^n + (3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t))\theta_1^n + +(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-3/2} + A_3^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_p^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t)\right)\theta_p^n + \left(12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t)\right)\theta_{p-1}^n + \left(3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t)\right)\theta_{p-2}^n +$$

$$\left(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-3/2} + A_3^n(t)\right)\theta_{p-3}^n + \sum_{r=4}^{p}\left(\frac{24i(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{r!(r-3)!}\lambda_n^{-(2r-3)/2} + A_r^n(t)\right)\theta_{p-r}^n,$$

$$n = 1, 2, \ldots, N, \;\; p = 4, 5, \ldots, m_n - 1.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gardner G. S., Green I. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
2. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1385–1403.
3. *Мельников В. К.* Метод интегрирования уравнения Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником. Препринт. Дубна, 1988.
4. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I // Дифф. ур. 1968. Т. 4, № 8. С. 1519–1533.
5. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. II //Дифф. ур. 1968. Т. IV, № 10. С. 1915–1924.