

УДК 517.946.22

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

© А. Х. Хасанов *, С. С. Исамухамедов **

* anvarhasanov@yahoo.com

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;

*** Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан*

Рассмотрим уравнение

$$A(u) = y^m u_{xx} + u_{yy} + y^m u_{zz} = 0, \quad (A)$$

в области $y > 0$. Решение уравнение (A) будем искать в виде

$$u = P\omega(\xi), \quad P = (r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad \xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (x - x_0)^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 + (z - z_0)^2. \quad (2)$$

Подставляя (1) в уравнение (A), получаем гипергеометрическое уравнение Гаусса
([1, стр. 85, (1)])

$$\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi} + [2\beta - (\beta + \frac{1}{2} + \beta + 1)\xi]\omega_{\xi} - \beta(\beta + \frac{1}{2})\omega = 0, \quad (3)$$

которое имеет две линейно-независимых решения

$$\omega_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = F\left(\frac{1}{2} + \beta, \beta; 2\beta; \xi\right), \quad (4)$$

$$\omega_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \xi^{1-2\beta} F\left(\frac{3}{2} - \beta, 1 - \beta; 2 - 2\beta; \xi\right). \quad (5)$$

Подставляя (4)–(5) в (1), находим следующие частные решения уравнения (A)

$$q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1(r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \beta; 2\beta; \xi\right), \quad (6)$$

$$q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_2(r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} \xi^{1-2\beta} F\left(\frac{3}{2} - \beta, 1 - \beta; 2 - 2\beta; \xi\right), \quad (7)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{2\beta}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{2-2\beta} \quad (8)$$

Частные решения (6)–(7) при $r \rightarrow 0$ имеют особенности порядка $\frac{1}{r}$. В самом деле, в силу формулы автотрансформации функции Гаусса, частное решение $q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1(r^2)^{-\frac{1}{2}} (r_1^2)^{-2\beta} F\left(\beta - \frac{1}{2}, \beta; 2\beta; \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2}\right). \quad (9)$$

Из равенства (9) при $r \rightarrow 0$ следует следующая оценка

$$|q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)| \leq \frac{c}{r}. \quad (10)$$

Следовательно, из выражения (10) получаем что, частное решение $q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ является фундаментальным решением уравнения (A). Аналогичным образом можно показать что, частное решение $q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ также является фундаментальным решением уравнения (A) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1973.