УДК 517.9

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КДФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

© У. А. Хоитметов

x_umid@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_t - buu_x + u_{xxx} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x, \eta)\phi(x, -\eta)) d\eta, \quad (1)$$

$$L\phi = \eta^2 \phi, \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$, $L(t) = \frac{d}{dx} + u(x, t)$.

Система нелинейных уравнений (1)–(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|e^{\varepsilon|x|} dx < \infty, \quad (4)$$

2) оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

В рассматриваемой задаче функция $\phi(x, \eta, t)$ — решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\phi \rightarrow h(\eta, t)e^{-i\eta x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (5)$$

где $h(\eta, t)$ — изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$h(-\eta, t) = \overline{h(\eta, t)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(|h(\eta, t)|^2 + \left| \frac{\partial h(\eta, t)}{\partial x} \right|^2 \right) d\eta < \infty \quad (6)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Пусть функция $u(x, t) = \operatorname{Re} u(x, t) + i \operatorname{Im} u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| e^{\varepsilon|x|} \right) dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (7)$$

В данной работе получены представления для решений $u(x, t)$, $\phi(x, \eta, t)$ задачи (1)–(7) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

В работах [1, 2] показано, что уравнение КдФ с самосогласованным источником, может быть решено с помощью метода обратной задачи рассеяния для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля. Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал оператора $L(t)$ — комплекснозначная функция. Хорошо известно, что несамосопряженный оператор $L(t)$ может иметь спектральные особенности (см. [3, 4]), которые лежат на непрерывном спектре. Мы предполагаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей. Кроме того, при выполнении вышеуказанных условий оператор $L(t)$ имеет конечное число (в общем случае кратных) комплексных собственных значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. N 23. P. 1385–1403.
2. Melnikov V. K. Integration of the KdV equation with a source // Inv. Probl. 1999. N 5. P. 233–246.
3. Блащак В. А. Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1519–1533.
4. Блащак В. А. Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. II // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4, № 10. С. 1915–1924.