

УДК 517.951

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

© А. В. Корниенко*, О. В. Корниенко

* akornienko@mail.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Работа посвящена изучению спектральных характеристик дифференциального оператора, порождённого граничной задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Простейшим примером классической системы уравнений в частных производных, попадающих в поле наших рассуждений, может служить система уравнений смешанного типа:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} - \operatorname{sign}(t) \frac{\partial u^2}{\partial x} - \varepsilon u^2 = f^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} + \varepsilon u^1 = f^2,$$

эллиптическая при $t > 0$ и гиперболическая при $t < 0$. Вопросы спектральной теории граничных задач для уравнений смешанного типа изучались в [1], [2]; в меньшей степени они изучены для систем уравнений смешанного типа. Отметим работу [3], в которой изучалась задача Римана – Гильберта для однородной системы уравнений Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы. Интересующие нас вопросы будем исследовать методом модельных операторов [4], [5].

Пусть $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; H_x — некоторое сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Через H_x^2 обозначим гильбертово пространство, равное ортогональной сумме двух копий гильбертова пространства H_x : $H_x^2 = H_x \oplus H_x$; а через H — тензорное произведение пространств H_t и H_x^2 : $H = H_t \otimes H_x^2$ [4]. Известно, что $H = H_t^2 \otimes H_x$. Для $f(t) \in H$ рассмотрим уравнение со спектральным параметром λ

$$L(D_t, B)u \equiv aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad (1)$$

(под уравнением мы понимаем систему) и граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \quad (2)$$

Здесь D_t — операция дифференцирования по переменной $t \in V_t$, $u(t) = (u^1(t), u^2(t))^T$, T — операция транспонирования, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B : H_x \rightarrow H_x$ — линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H_x областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t \in V_t$, полная система $\{\varphi^s; s \in S\}$, собственных элементов которого образует базис Рисса в H_x ; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s .

Нас интересуют спектральные характеристики задачи (1), (2). Приведём вначале некоторые общие подходы изучения граничной задачи (1), (2). Обозначим через $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из гладких вектор-функций $u(t) \in \mathbf{C}(V_t, H_x) \cap \mathbf{C}^1(V_t^\pm, H_x)$, удовлетворяющих условиям (2) и принадлежащих для любого $t \in V_t^\pm$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B . Здесь $\mathbf{C}(V_t, H_x) = \mathbf{C}(V_t) \otimes H_x$, $\mathbf{C}(V_t) = C(V_t) \otimes U$; $\mathbf{C}^1(V_t^\pm, H_x) = \mathbf{C}^1(V_t^\pm) \otimes H_x$, $\mathbf{C}^1(V_t^\pm) = C^1(V_t^\pm) \otimes U$; $V_t^\pm = V_t^- \cup V_t^+$, $V_t^- = (T_1, 0)$, $V_t^+ = (0, T_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t) \in H$. Элемент $u(t) \in H$ называем *обобщённым решением граничной задачи* (1)–(2), если найдётся последовательность таких гладких вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u(t)\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L(D_t, B)u_n(t) - \lambda u(t) - f(t)\|_H = 0$.

Для $m = 1, 2; s \in S$, положим

$$w_{m,s} = \operatorname{ch}(B(s)T_1) \cos(B(s)T_2) + (-1)^{m+1} \sqrt{\operatorname{ch}^2(B(s)T_1) \cos^2(B(s)T_2) - 1},$$

$$a_{m,s} = \operatorname{ch}(B(s)T_1) - w_{m,s} \cos(B(s)T_2), \quad b_{m,s} = \operatorname{sh}(B(s)T_1) + w_{m,s} \sin(B(s)T_2),$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество $s \in S$, для которых выполнено равенство $a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0$, то есть положим:

$$\mathfrak{S} = \left\{ s : a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0; s \in S \right\}.$$

Теорема 1. Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L : H \rightarrow H$ от параметров задачи (1), (2) следующая:

1. Система собственных вектор-функций оператора L минимальна в гильбертовом пространстве H .
2. Система собственных вектор-функций оператора L полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{S}$ пусто.
3. Система собственных вектор-функций оператора L образует базис в гильбертовом пространстве H , если $0 \in \bigcap_s \bigcap_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$ ($\Gamma_{m,s}^l$ — некоторое множество, определяемое параметрами задачи).

ПРИМЕР. Положив в (1) $B = D_x + 1$ при условиях периодичности по x , получим оператор $L : H \rightarrow H$, порождённый системой уравнений смешанного типа в замкнутой области $V = V_t \times V_x$, $V_t = [-\pi, \pi]$, $V_x = [0, 2\pi]$, при условиях периодичности по t и по x , система собственных вектор-функций которого полна в $H = \mathbb{L}_2(V) = L_2(V) \oplus L_2(V)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: изд-во МГУ, 1988. 150 с.
2. Кальменов Т. Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Дисс. ...доктора. физ. – мат. наук. М., МГУ, 1982. 241 с.
3. Солдатов А. П. Задача Римана – Гильберта для системы Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 398, № 12. С. 1653–1663.
4. Дезин А. А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М.: Наука – МАИК "Наука/Интерпериодика 2000. 175 с. (Тр. МИАН. Т. 229).
5. Романко В. К. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1574–1585.