

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОТИПНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© Д. В. Корниенко, В. В. Корниенко

dmkornienko@mail.ru, V_V_Kornienko@mail.ru

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_1(D)u \equiv a_1 D_t u + b_1 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$L_2(D)u \equiv a_2 D_t u + b_2 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при } a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

где D_t и $B(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq r} b_\alpha D_x^\alpha$ дифференциальные операции соответственно по $t \in V_t = [T, 0], -\infty < T < 0$, и $x = (x_1, \dots, x_m) \in V_x$ — замкнутой ограниченной области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $D = D_t D_x$, α — целочисленный мультииндекс $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $b_\alpha(x) = b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x)$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_m}^{\alpha_m}$, $u = u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x))^T$ является вектор — столбцом. Присоединим к системам (1) и (2) краевые условия

$$\Gamma_t u \equiv u^1 \Big|_{t=T} = u^1 \Big|_{t=0} = 0, \quad \Gamma_x u = 0. \quad (3)$$

описывающие поведение вектор — функции $u(t, x)$ в граничных точках множества $V = V_t \times V_x$ по переменным t и x соответственно. Обозначим через B сильное расширение в гильбертовом пространстве $H_x = L_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям $\Gamma_x u = 0$. В дальнейшем считаем, что полная система $\{\varphi^s; s \in S\}$, собственных элементов оператора B образует базис Рисса в H_x ; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s . Через ϱB , σB ; $P\sigma B$, $C\sigma B$ и $R\sigma B$ принято обозначать резольвентное множество, спектр; точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора B соответственно. Положим $H_t = L_2(V_t)$, $H_{tx} = H_t \otimes H_x$ — тензорное произведение пространств H_t и H_x [1]. Через H обозначим гильбертово пространство, равное ортогональной сумме двух копий гильбертова пространства H_{tx} : $H = H_{tx} \oplus H_{tx}$. Известно, что $H = H_t^2 \otimes H_x$, где $H_t^2 = H_t \oplus H_t$, и норма в гильбертовом пространстве H вектор — функций $u: V \rightarrow H_x^2$ вычисляется по формуле $|u; H| = ||u(t); H_x^2|; H_t|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $u \in H$ называется *обобщённым решением задачи* (1)–(3), если найдётся последовательность $\{u_n\}$ гладких и удовлетворяющих условиям (3) вектор — функций $u_n = u_n(t, x)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u; H| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_1(D)u_n - \lambda u - f; H| = 0$.

Это определение ставит в соответствие задаче (1)–(3) замкнутый оператор L_1 [2]. Под спектральными свойствами задачи (1)–(3) мы понимаем соответствующие свойства оператора L_1 . Аналогично определяется оператор L_2 , сопоставляемый задаче (2)–(3).

Пусть $A(K) = \{A(k) : k \in \mathbb{Z}\}$, $A(k) = -ik \frac{\pi}{T}$. Обозначим через $\overline{A(K)}$ пополнение множества $A(K)$ символом $A(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = i \cdot \infty$; а через $(B(S))'$ — предельные точки множества $B(S) = \{B(s); s \in S\}$. Пусть $AB = A(K) \cap B(S)$, $\overline{AB}' = \overline{A(K)} \cap (B(S))'$. Будем считать, что $A(k) \in (B(S))'$ и, в частности, $A(\infty) \in (B(S))'$, если найдутся такие последовательности $\{k_j\}_{j=1}^\infty, k_j \in \mathbb{Z}; \{B(s_j)\}_{j=1}^\infty, s_j \in S$; что $\lim_{j \rightarrow \infty} |A(k_j) - B(s_j)| = 0$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} A(k_j) = A(k)$.

Теорема 1. Зависимость структуры спектра σL_1 оператора L_1 от параметров задачи (1), (3) следующая:

1. Если $0 \in P\sigma B$, то $P\sigma L_1 = \mathbb{C}$.
2. Если множество AB не пусто, то $P\sigma L_1 = \mathbb{C}$.
3. Если $AB = \emptyset$, а множество $\overline{AB'}$ не пусто, то $C\sigma L_1 = \mathbb{C}$.
4. Если $AB = \overline{AB'} = \emptyset$, то $\sigma L_1 = \emptyset$ и, следовательно, $\varrho L_1 = \mathbb{C}$.

Теорема 2. Зависимость структуры спектра σL_2 оператора L_2 от параметров задачи (2), (3) следующая:

1. Если $0 \in P\sigma B$, то $P\sigma L_2 = \mathbb{C}$.
2. Если $0 \in C\sigma B$, то $\sigma L_2 = P\sigma L_2 \cup C\sigma L_2 = \mathbb{C}$.
3. Если $0 \notin \sigma B$, то $\sigma L_2 = P\sigma L_2 \cup C\sigma L_2$. Причём $C\sigma L_2 = \overline{P\sigma L_2} \setminus P\sigma L_2$.

Теорема 3. Зависимость свойств системы собственных вектор — функций оператора $L_2 : H \rightarrow H$ от параметров задачи (2), (3) следующая:

1. Система собственных вектор — функций оператора L_2 минимальна в гильбертовом пространстве H .
2. Система собственных вектор — функций оператора L_2 полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда множество AB пусто, то есть $0 \notin P\sigma L_2$.
3. Если множество AB пусто, то существует последовательность из полной системы собственных вектор — функций оператора L_2 , не являющаяся базисом в гильбертовом пространстве H .

Случай $m = 1, B(D_x) = D_x + \varepsilon$, при условиях периодичности по x рассмотрен в [3].

Авторы выражают глубокую благодарность проф. А. А. Дезину и проф. В. К. Романко за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дезин А. А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М.: Наука–МАИК "Наука/Интерпериодика 2000. 175 с. (Тр. МИАН. Т. 229).
2. Романко В. К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, №1. С. 47–50.
3. Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, №1. С. 91–100.