

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© Д. В. Корниенко*, О. В. Корниенко

* dmkornienko@mail.ru

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец

Выписав две эллиптические системы

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \varepsilon u^2 = f^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} + \varepsilon u^1 = f^2; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \varepsilon u^2 = f^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} + \varepsilon u^1 = f^2, \quad (2)$$

отметим, что система (1) подобна системе (2) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (1). Эти преобразования могут наводить на мысль о совпадении свойств разрешимости краевых задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим краевую задачу. Тем не менее исследования показывают, что спектральные свойства дифференциальных операторов, порождаемых рассматриваемой задачей различны. Системы (1) и (2) будем в дальнейшем называть *эллиптическими системами первого и второго типа* соответственно.

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_1(D)u \equiv a_1 D_t u + b_1 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$L_2(D)u \equiv a_2 D_t u + b_2 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при } a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

где D_t и $B(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq r} b_\alpha D_x^\alpha$ — дифференциальные операции соответственно по $t \in V_t = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, и $x = (x_1, \dots, x_m) \in V_x$ — замкнутой ограниченной области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $D = D_t D_x$, α — целочисленный мультииндекс $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $b_\alpha(x) = b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(x)$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_m}^{\alpha_m}$, $u = u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x))^T$ является вектор-столбцом. Присоединим к системам (1) и (2) краевые условия

$$\Gamma_t u \equiv \mu u(0) - u(T) = 0; \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad \mu \neq 0; \quad \Gamma_x u = 0, \quad (5)$$

описывающие поведение вектор-функции $u(t, x)$ в граничных точках множества $V = V_t \times V_x$ по переменным t и x соответственно. Обозначим через B сильное расширение в гильбертовом пространстве $H_x = L_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям $\Gamma_x u = 0$. В дальнейшем считаем, что полная система $\{\varphi^s; s \in S\}$, собственных элементов оператора B образует базис Рисса в H_x ; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s . Через ϱB , σB ; $P\sigma B$, $C\sigma B$ и $R\sigma B$ принято обозначать резольвентное множество, спектр; точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора B соответственно. Положим $H_t = L_2(V_t)$, $H_t^2 = H_t \oplus H_t$ — ортогональная сумма двух копий гильбертова пространства H_t . Через H обозначим тензорное произведение гильбертовых пространств H_t^2 и H_x : $H = H_t^2 \otimes H_x$ [1]. Известно, что

$H = H_t \otimes H_x^2$ и норма в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u : V \rightarrow H_x^2$ вычисляется по формуле $|u; H| = ||u(t); H_x^2; H_t|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $u \in H$ называется *обобщённым решением задачи* (3)–(5), если найдётся последовательность $\{u_n\}$ гладких и удовлетворяющих условиям (5) вектор-функций $u_n = u_n(t, x)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u; H| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_1(D)u_n - \lambda u - f; H| = 0$.

Это определение ставит в соответствие задаче (3)–(5) замкнутый оператор L_1 [2]. Под спектральными свойствами задачи (3)–(5) мы понимаем соответствующие свойства оператора L_1 . Аналогично определяется оператор L_2 , сопоставляемый задаче (4)–(5).

Теорема 1. Спектр σL_1 оператора $L_1 : H \rightarrow H$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma L_1$ оператора L_1 . Множество $C\sigma L_1 = \sigma L_1 \setminus P\sigma L_1$ образует непрерывный спектр оператора L_1 . Система собственных вектор-функций оператора L_1 образуют базис Рисса в пространстве H .

Теорема 2. Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L_2 : H \rightarrow H$ от параметров задачи (4), (5) следующая:

1. Система собственных вектор-функций оператора L_2 минимальна в гильбертовом пространстве H .
2. Система собственных вектор-функций оператора L_2 полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда $0 \notin P\sigma L_2$.
3. Если $0 \notin P\sigma L_2$, то система собственных вектор-функций оператора L_2 образует базис в H ; построенный базис не является базисом Рисса в H .

ПРИМЕР 1. Спектр периодической задачи для эллиптической системы первого типа, рассматриваемой в $V = [0, 2\pi]^2$, состоит из собственных значений

$$\lambda_{m,k,s} = ik + i(-1)^m [is + \varepsilon]; \quad m = 1, 2; \quad k, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Точки спектра расположены (достаточно редко) на прямых, параллельных мнимой оси. Собственные вектор-функции образуют ортонормированный базис в $H = \mathbb{L}_2(V)$.

ПРИМЕР 2. Точечный спектр периодической задачи для эллиптической системы второго типа, рассматриваемой в $V = [0, 2\pi]^2$, даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = (-1)^m \sqrt{-k^2 + (is + \varepsilon)^2}; \quad m = 1, 2; \quad k, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Точки точечного спектра расположены достаточно редко на комплексной плоскости. Система собственных вектор-функций не является полной в $H = \mathbb{L}_2(V)$, при $\varepsilon = 1$.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. К. Романко за постановку задачи и всестороннюю поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 207 с.
2. Романко В. К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 1. С. 47–50.