

УДК 517.983.51

СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© О. В. Коробова

ollis@mail.ru

Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск

В работе исследуется сингулярная система дифференциальных уравнений вида

$$MB \frac{d\bar{u}}{dt} = \Lambda A \bar{u}(t) + \bar{f}(t), \quad (1)$$

с начальным условием

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0. \quad (2)$$

Здесь M, Λ — квадратные матрицы порядка s ; A, B — замкнутые линейные операторы с плотной областью определения, действующие из E_1 в E_2 ; E_1, E_2 — банаховы пространства; $\bar{u}(t)$ — искомая вектор-функция, каждая компонента которой является функцией со значениями в E_1 ; $\bar{f}(t)$ — заданная вектор-функция, имеющая компоненты со значениями в E_2 ; оператор B необратим, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{R(B)} = R(B)$; оператор A непрерывно обратим,

$$A\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} Au_1(t) \\ \vdots \\ Au_s(t) \end{pmatrix}.$$

Если пучок матриц $(\mu M - \Lambda)$ регулярен [1], то существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что

$$P(\mu M - \Lambda)Q = \mu \begin{pmatrix} E_{s-q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

где E_{s-q} и E_q единичные матрицы соответствующих размерностей, L — квадратная матрица порядка $(s - q)$ [2].

Пусть выполнено условие

I. Матрица L имеет $s - q$ различных отличных от нуля собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-q}$. Тогда для матрицы L существует невырожденная матрица C такая, что

$$C^{-1}LC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-q}).$$

С помощью замены переменных $\bar{u} = Q\bar{v}$ и $\bar{v}_1 = C\bar{w}$, где $\bar{v}_1(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{s-q}(t) \end{pmatrix}$, система (1)

распадается на $s - q$ независимых задач

$$B \frac{dw_l}{dt} = \lambda_l A w_l(t) + q_l(t), \quad (3)$$

с начальными условиями

$$w_l(0) = w_l^0, l = \overline{1, s - q} \quad (4)$$

и q уравнений

$$0 = Av_l(t) + g_l(t), l = \overline{s - q + 1, s} \quad (5)$$

$$\text{Здесь } \bar{q}(t) = C^{-1}\bar{g}_1(t), \bar{g}(t) = P\bar{f}(t), \bar{g}_1(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_{s-q}(t) \end{pmatrix}.$$

Каждая из новых задач (3)–(4) исследуется методами работ [3–5], а из уравнений (5) функции $v_l(t)$, $l = \overline{s - q + 1, s}$ находятся следующим образом

$$v_l(t) = -A^{-1}g_l(t), l = \overline{s - q + 1, s}.$$

После чего, возвращаясь к исходным переменным, восстанавливается решение исходной задачи (1)–(2).

Задачу Коши (1)–(2) в обобщенных функциях можно переписать в виде системы сверточных уравнений относительно $\tilde{u}(t) \in K'_+(E_1)$ ($K'_+(E_1)$ — класс обобщенных функций с ограниченным слева носителем)

$$(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \bar{f}(t)\theta(t) + MB\bar{u}_0\delta(t), \quad (6)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матричной фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ на классе $K'_+(E_2)$ будем называть такую обобщенную матричную оператор-функцию $E(t)$, что на основном пространстве $K(E_2^*)$ справедливы равенства

$$(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * E(t) * \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t) \quad \forall \tilde{u}(t) \in K'_+(E_2)$$

и

$$E(t) * (MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{v}(t) = \tilde{v}(t) \quad \forall \tilde{v}(t) \in K'_+(E_1).$$

Таким образом, если существует свертка $E(t) * (\bar{f}(t)\theta(t) + MB\bar{u}_0\delta(t))$, то она является единственным решением системы сверточных уравнений (6) в классе $K'_+(E_1)$, т. е.

$$\bar{u}(t) = E(t) * (\bar{f}(t)\theta(t) + MB\bar{u}_0\delta(t)). \quad (7)$$

Используя представление (7), была исследована связь между обобщенным и непрерывным решениями задачи Коши (1)–(2). Были рассмотрены следующие случаи: оператор B фредгольмов и имеет полный A -жорданов набор, оператор B нетеров и имеет полный A -жорданов набор, операторный пучок $(B - \lambda A)$ спектрально ограничен.

Полученные результаты допускают обобщение на случай системы N -го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб.мат.журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
4. Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб.мат.журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
5. Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференц.уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С. 769–774.