

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ

© С. А. Корольков

sergei.korolkov@rambler.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть M — риманово многообразие с концами $D_1, \dots, D_m$. Зафиксируем некоторый конец D_i . Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на D_i функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ эквивалентны на D_i , и использовать обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ конца D_i выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{D_i \setminus B_k} |f_1(x) - f_2(x)| = 0.$$

Отношение “ $\sim$ ” является отношением эквивалентности, не зависит от выбора исчерпания конца D_i и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных ограниченных на D_i функций на классы эквивалентности (см., например, [2]). Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Введем понятие предела по концу многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что число b является *пределом функции $u(x)$ по концу D_i* и использовать обозначение $\lim_{D_i} u(x) = b$, если $u(x) \sim b$ на D_i , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{D_i \setminus B_k} |u(x) - b| = 0$$

для некоторого исчерпания $\{B_k\}$ конца D_i .

Несложно показать, что определение предела не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ в силу свойств отношения “ $\sim$ ” (см., например, [2]).

Определим поток гармонической функции по концу многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Потоком гармонической функции u по концу D_i* назовем число

$$\text{flux}_{D_i} u = \int_{\partial B(0,r) \cap D_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu',$$

где $B(0,r)$ — геодезический шар радиуса r такой, что $B \subset B(0,r)$, ν — единичная внешняя нормаль к $B(0,r)$.

Заметим, что в силу формулы Грина определение потока не зависит от r .

Всюду далее будем считать, что $D_1, \dots, D_s$ — концы параболического типа, $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ — концы гиперболического типа, $s+l=m$.

Обозначим через $\mathbb{H}(M)$ пространство гармонических на M функций.

Пусть D_j — конец гиперболического типа. Будем говорить, что функция f_j принадлежит *классу допустимых на конце D_j функций*, если на конце D_j существует гармоническая функция u такая, что $u \sim f_j$ на конце D_j .

Всюду далее через K_j будем обозначать класс допустимых на конце D_j функций, $j = s+1, \dots, s+l$.

Пусть теперь D_i — конец параболического типа. Обозначим через $\mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i)$ такое подпространство гармонических на конце D_i функций, что для любой функции $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i)$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{D_i} u$.

Обозначим через $\mathbb{H}\mathbb{A}(M)$ такой класс гармонических на M функций, что любая функция $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}(M)$ на каждом конце параболического типа D_i принадлежит $\mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i)$, т.е.

$$\mathbb{H}\mathbb{A}(M) = \{u \in \mathbb{H}(M) : u|_{D_i} \in \mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i), i = 1, \dots, s\}.$$

Далее будем рассматривать многообразия M , которые имеют гиперболический тип. Заметим, что многообразие с концами имеет гиперболический тип тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы один конец гиперболического типа (см. [1]).

Пусть $a_1, \dots, a_s$ — некоторый набор констант, а $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$ — набор функций, заданных на концах $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ соответственно. Будем говорить, что на многообразии M разрешима обобщенная краевая задача третьего рода (1) для набора констант $a_1, \dots, a_s$ и набора функций $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$, если на M существует функция $u(x) \in \mathbb{H}(M)$ такая, что

$$\text{flux}_{D_i} u(x) = a_i, i = 1, \dots, s, \quad u(x)|_{D_j} \in [f_j], j = s+1, \dots, s+l. \quad (1)$$

Нам также потребуется определение Δ -строгого конца многообразия (см. [2]). Пусть $v_j(x)$ — емкостный потенциал конца D_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что конец D_j многообразия M является Δ -строгим, если $v_j(x) \in [0]$ на D_j .

Очевидно, что каждый Δ -строгий конец D_j многообразия M имеет гиперболический тип.

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ -строгими. Тогда на многообразии M разрешима обобщенная краевая задача третьего рода (1) для любых констант $a_1, \dots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.

Теорема 2. Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ -строгими. Если $a_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$, то решение обобщенной краевой задачи третьего рода (1) в классе функций $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}(M)$ существует и единственно для любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.

Теорема 3. Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ -строгими. Если для всех $i = 1, \dots, s$, для которых $a_i \neq 0$, существует неограниченная на конце D_i функция $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i)$, то решение обобщенной краевой задачи третьего рода (1) в классе функций $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}(M)$ существует и единственно для любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.

Теорема 4. Предположим, что на M выполнены следующие условия

1) для каждого $i = 1, \dots, s_1 \leq s$ существует неограниченная на конце D_i функция $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}_i(D_i)$,

2) для всех $j = s_1+1, \dots, s$ любая функция $u \in \mathbb{H}\mathbb{A}_j(D_j)$ ограничена на D_j ,

3) для всех $p = s+1, \dots, s+l$ классы допустимых функций K_p состоят только из констант.

Тогда

$$\dim \mathbb{H}\mathbb{A}(M) = s_1 + l.$$

Автор выражает глубокую благодарность д. ф.-м. н., профессору А. Г. Лосеву, а также к. ф.-м. н., доценту Е. А. Мазепе за полезные обсуждения и замечания по теме настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249
2. Мазепа Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43, № 3. С. 591–599.