

УДК 517.95

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШАРЕ

© Б. Д. Кошанов

koshanov@list.ru

Центр физико-математических исследований МОН РК, Алматы, Казахстан

В данной работе в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений пространстве произвольной размерности. Отметим, что полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset R^n$ (n — натуральное число, δ — положительное число) с границей $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^i} u \right|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (2)$$

где $\vec{n}_x = \frac{x}{|x|}$ — нормаль к $\partial\Omega_\delta$ в точке x , Δ — оператор Лапласа.

Используя свойства симметричности фундаментального решения, доказана следующая:

Теорема. А) В случае нечетного n функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде:

$$G_{2m,n}(x, y) = \varepsilon_{2m,n}(x, y) - g_{2m,n}^1(x, y) - \sum_{k=2}^m g_{2m,n}^k(x, y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x, y) = c_{2m,n} |x - y|^{2m-n},$$

$$g_{2m,n}^1(x, y) = c_{2m,n} \left[\left| \frac{y}{\delta} \right| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \delta^2 \right| \right]^{2m-n},$$

$$g_{2m,n}^k(x, y) = (2m-n)(2m-2-n) \dots (2m-2k+4-n) c_{2m,n} \cdot \left[\left| \frac{y}{\delta} \right| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \delta^2 \right| \right]^{2m-2k+2-n} \cdot$$

$$\left(1 - \left| \frac{y}{\delta} \right|^2 \right)^{k-1} \left(1 - \left| \frac{x}{\delta} \right|^2 \right)^{k-1} \cdot \frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 2, \dots, m$$

$$c_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)! 2^{m-1} (2m-n)(2(m-1)-n) \dots (2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n}.$$

В) Утверждение А) остается справедливым при четных n , если $2m < n$.

С) Когда n четное и $2m \geq n$, то функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде:

$$G_{2m,n}(x, y) = \varepsilon_{2m,n}(x, y) - g_{2m,n}^1(x, y) - \sum_{k=2}^m g_{2m,n}^k(x, y),$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2m,n}(x, y) &= c_{2m,n} |x - y|^{2m-n} \ln |x - y|, \\ g_{2m,n}^1(x, y) &= c_{2m,n} \left[\left| \frac{y}{\delta} \right| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \delta^2 \right| \right]^{2m-n} \ln |x - y|, \\ g_{2m,n}^k(x, y) &= (2m - n)(2m - 2 - n) \dots (2m - 2k + 4 - n) c_{2m,n} \cdot \left[\left| \frac{y}{\delta} \right| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \delta^2 \right| \right]^{2m-2k+2-n} \cdot \\ &\quad \ln |x - y| \cdot \left(1 - \left| \frac{y}{\delta} \right|^2 \right)^{k-1} \left(1 - \left| \frac{x}{\delta} \right|^2 \right)^{k-1} \frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 2, \dots, m, \\ c_{2m,n} &= \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m - n/2 + 1) \cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}.\end{aligned}$$

Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областей [3–4]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами. Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеется в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берс Л., Джон Ф., Шефтер М. Уравнения с частыми производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
3. Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д., Исакова У. А. Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Препринт. Алматы, 2005. 54 с.
4. Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д. О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Доклады НАН РК. 2006. Т. 5. С. 9–12.
5. Begehr H., Vanegas C. J. Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation // Math. Nachr. 2006. V. 279. P. 38–57.