Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 194–195

УДК 517.9

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВА

© А. А. Коваленко

nazgash@gorodok.net

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В настоящей работе рассматриваются смешанные краевые задачи для псевдопараболических уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(D_t, D_x)u = f(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}_n^+,\\
&B_j(D_x)u|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu,\ t>0,\ x'\in\mathbb{R}_{n-1},\\
&D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k=0,\dots,l-1,\ x\in\mathbb{R}_n^+,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L(D_t, D_x) + L'(D_x),$$

при этом $L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum\limits_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k$ — оператор главной части, а $L'(D_x)$ — младшая часть дифференциального оператора $\mathcal{L}(D_t, D_x)$.

Главная часть оператора $\mathcal{L}(D_t, D_x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. Символ $L(i\eta, i\xi)$ однороден относительно вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,n$, т. е.

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi) = c\, L(i\eta, i\xi), \quad c>0.$$

2. Оператор $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим, т.е. $L_0(i\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$

3. При $\operatorname{Re}\tau \geq 0$, $\xi\in\mathbb{R}_n$, $|\tau| + |\xi| \neq 0$ выполнено неравенство

$$\tau^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)}\tau^k \neq 0.$$

Будем рассматривать граничные операторы, не содержащие операторы D_t:

$$B_j(D_x) = D_{x_n}^{m_j} + \sum_{k<m_j} b_{j,k}(D_{x'})D_{x_n}^k, \quad m_j < 1/\alpha_n,$$

при этом символы $B_j(i\xi)$ являются однородными относительно вектора α из условия 1 с показателями β_j, $0 \leq \beta_j < 1$, т. е.

$$B_j(c^{\alpha} i\xi) = c^{\beta_j} B_j(i\xi), \quad c>0.$$

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено условие Лопатинского.

Известно [1], что при $|\alpha|/p' + l\alpha_0 \leqslant 1$ задача (1) корректно разрешима при дополнительных условиях ортогональности на правую часть $f(t,x)$. В работе доказаны следующие теоремы о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи (1) в шкале соболевских пространств $W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), 1 < p \leqslant 2$:

Теорема 1 (об условной разрешимости). *Пусть* $\frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 \leq 1$ *и для некоторых целых неотрицательных чисел* σ_j, $j = 1, \ldots, n$ *выполнено неравенство*

$$\frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\sigma_j + \alpha_{\min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\sigma_j, \quad \alpha_{min} = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Тогда смешанная задача (1) имеет единственное решение $u(t,x) \in W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, *для любой функции* $f(t,x) \in W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), s = (\frac{1}{\alpha_0} - l, 0, \ldots, 0)$, *удовлетворяющей условиям*

$$(1 + \langle x\rangle)^{\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j\alpha_j} f(t,x) \in W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{+}_{1}; L_1(\mathbb{R}^{+}_{n})),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} x^{\sigma} f(t,x)\, dx = 0, \quad \sigma \in \Sigma = \left\{\sigma \Big| \frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j\alpha_j \leqslant 1\right\}.$$

Для решения справедлива оценка

$$\|u(t,x), W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{k=0}^{l} \|D^{k}_{t}u(t,x), W^{0,(1-k\alpha_0)r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|$$

$$\leq c \left(\|f(t,x), W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \| \|(1 + \langle x\rangle)^{\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j\alpha_j} f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{+}_{n})\|, W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{+}_{1})\| \right)$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f(t,x)$.

Теорема 2 (о необходимых условиях разрешимости). *Пусть* $\Gamma(\tau, s)$ *— контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения* $\mathcal{L}(\tau, is, i\lambda) = 0$, $|\tau| \leqslant A$, $s \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$. *Если для некоторых неотрицательных целых чисел* σ_j, $j = 1, \ldots, n$ *выполнено неравенство из теоремы 1 и при некотором* $j = 1, \ldots, \mu$

$$\psi_j(\tau, s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(\tau,s)} \frac{B_j(is, i\lambda)}{\mathcal{L}(\tau, is, i\lambda)}\, d\lambda \not\equiv 0,$$

то для разрешимости смешанной задачи (1) в пространстве $W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$, $1 < p \leqslant 2, \gamma > \gamma_0$, *необходимо выполнение условий*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} x^{\sigma} f(t,x)\, dx = 0, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Автор выражает глубокую признательность профессору Г. В. Демиденко за неоценимые комментарии и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Демиденко Г. В.* Смешанные задачи для одного класса уравнений Соболева // Теоремы вложения и их приложения. №1. Новосибирск, 1982. С. 44–74.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Сер. Мат. 1954. Т. 18, №1. С. 3–50.