

УДК 517.9

ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $x \rightarrow \infty$ РЕШЕНИЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Л. М. Кожевникова

kosul@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1} = \{\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y}) \mid x \in \mathbb{R}, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n\}$, расположенной вдоль оси Ox , рассматривается уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^j D_x^j \widehat{T}^{\bar{\beta}}(a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) T^{\bar{\alpha}} D_x^i u) = \Phi, \quad \bar{\mathbf{y}} \in \Omega. \quad (1)$$

Множество индексов $\bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$ определяется двумя параметрами $q, k \in \mathbb{N}, q \leq k$. Φ — линейный непрерывный функционал с ограниченным носителем. Комплексные псевдодифференциальные операторы $T^{\bar{\alpha}}, \widehat{T}^{\bar{\alpha}}$ определяются сопряженными символами $A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z}), \bar{A}^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, соответственно. Комплекснозначные функции $A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: существуют числа $A > 0, \nu(\bar{\alpha}) > 0, \nu(\bar{\alpha}) \in [\frac{i}{k}, 1]$ такие, что при п. в. $(x, \mathbf{z}) \in \Omega$ справедливы неравенства $|A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z})| \leq A D^{\frac{k\nu-i}{k\nu}}(\mathbf{z}), \bar{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$. Здесь $D(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ — действительная неотрицательная непрерывная функция, такая, что $D(\mathbf{z}) \neq 0$ для $\mathbf{z} \neq 0$. Действительные функции $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}), \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}$, считаем измеримыми и удовлетворяющими некоторому условию малости.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^{|\bar{\alpha}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}}(a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u) = \Phi, \quad \bar{\mathbf{y}} \in \Omega; \quad (1')$$

$$D_x^i u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad i < k; \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \alpha_s < m_s, \quad s = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь $\bar{\alpha} = (i, \alpha) = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндексы с целыми неотрицательными числами $i, \alpha_s, s = \overline{1, n}, |\bar{\alpha}| = i + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Множество $\mathcal{S}$ определяется параметрами $q, k, l_s, m_s \in \mathbb{N}, q \leq k, l_s \leq m_s, s = \overline{1, n}, \max_{s=\overline{1, n}} \frac{l_s}{m_s} \leq \frac{q}{k}: \mathcal{S} = \left\{ \bar{\alpha} \mid \max_{s=\overline{1, n}} \frac{l_s}{m_s} \leq \nu(\bar{\alpha}) = \frac{i}{k} + \frac{\alpha_1}{m_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m_n} \leq 1 \right\}$.

Уравнение (1') является частным случаем уравнения (1) при $D^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\},$

$$A^{\bar{\alpha}}(x, \mathbf{z}) = \iota^{|\alpha|} \mathbf{z}^{\alpha} = (\iota z_1)^{\alpha_1} (\iota z_2)^{\alpha_2} \dots (\iota z_n)^{\alpha_n}.$$

Рассматриваются обобщенные решения уравнения (1) в классе функций, соответствующем однородной задаче Дирихле. Работа посвящена исследованию зависимости поведения на бесконечности решения уравнения (1) от геометрии неограниченной области Ω .

Предполагается, что для любого $r > 0$ сечение $\Omega \cap \{x = r\} \neq \emptyset$. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем λ -последовательностью области Ω , если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\frac{1}{\theta \Delta_N^{2[k, q]}} \leq \lambda(x_N, x_{N+1}) \equiv \inf \left\{ J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) \mid g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} g^2 d\bar{\mathbf{y}} = 1 \right\},$$

где $\rho^{[k,q]}$ равно ρ^k или ρ^q при $\rho < 1$ или $\rho \geq 1$, $\Delta_N = x_{N+1} - x_N$, $\Omega_{x_N}^{x_{N+1}} = \{\bar{\mathbf{y}} \in \Omega \mid x_N < x < x_{N+1}\}$, $J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) = \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} (|D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2) d\mathbf{y} dx + \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}^2(\mathbf{z}) |F_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z} dx$, $N = \overline{0, \infty}$.

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ -последовательности:

$$\text{при любом } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0. \quad (3)$$

При этом λ -последовательность можно построить начиная с любого $x_0 > 0$.

Теорема 1. Пусть область Ω удовлетворяет условию (3) и $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ — λ -последовательность области Ω . Тогда существуют положительные постоянные κ , M такие, что для решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ уравнения (1) при всех $N \geq 2$ справедлива оценка

$$J_{x_N}(u) \leq M \exp(-\kappa N). \quad (4)$$

Показано, что для областей с нерегулярным поведением границы оценка (4) является более точной, чем оценка, установленная О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян в работе [1] для эллиптического уравнения второго порядка.

Для трубчатых областей вида $\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < f(x)\}$ с положительной функцией $f(x)$ можно выразить оценку (3) в терминах функции $f(x)$.

Теорема 2. Существуют положительные постоянные $\tilde{\kappa}$, $\tilde{M}$ такие, что для решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ уравнения (1) в трубчатой области $\Omega(f)$ справедлива оценка

$$J_r(u) \leq \tilde{M} \exp \left(-\tilde{\kappa} \int_1^r \frac{dx}{\phi(f)^{[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}]}(x)} \right), \quad r \geq r_0. \quad (5)$$

Здесь $\phi(r)$, $r \geq 0$ монотонно возрастающая непрерывная функция такая, что $\phi(0) = 0$, определяемая по функции $\mathcal{D}(\mathbf{z})$. Например, для функции $\mathcal{D}^2(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^n \{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\}$ $\phi(r) = r^{[m, l]}$, $r \geq 0$, где $m = \max_{s=\overline{1, n}} m_s$, $l = \min_{s=\overline{1, n}} l_s$, $l_s \leq m_s$, $l_s, m_s \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1, n}$.

В областях $\Omega(f_a)$, $\Omega(f_{-a})$ с функциями $f_a(x) = x^a$, $0 < a < q/l$, $f_{-a}(x) = x^{-a}$, $0 < a$, для решений задачи (1'), (2) оценка (5) соответственно принимает вид

$$J_r(u) \leq \tilde{M} \exp \left(-\tilde{\kappa}_a r^{1-a/q} \right), \quad J_r(u) \leq \tilde{M} \exp \left(-\tilde{\kappa}_{-a} r^{1+am/k} \right), \quad r \geq r_0.$$

Отсюда видно, что для расширяющихся областей решение убывает быстрее с уменьшением l и увеличением q . В случае сужающихся областей решение убывает быстрее с уменьшением k и увеличением m .

В следующей теореме для широкого класса трубчатых областей устанавливается точность оценки (4) в случае эллиптического уравнения второго порядка.

Теорема 3. Пусть положительная функция $f(x)$ и возрастающая последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ удовлетворяют условиям

$$\bar{\omega}^{-1} \leq \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad \Delta_N \leq \omega_1 \inf_{[x_N, x_{N+1})} f(x), \quad \omega_1 \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty}.$$

Тогда для неотрицательного решения уравнения (1') при $q = k = l_s = m_s$, $s = \overline{1, n}$ в трубчатой области $\Omega(f)$ существуют положительные числа K , μ , такие, что справедливы неравенства

$$\|u\|_{L_2(\Omega_{x_N}(f))}^2 \geq \mu \exp(-KN), \quad N \geq 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00354-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 4. С. 588—610.