

УДК 517.925

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕНИ С ПЕРИОДОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© А. А. Кульжумиева *, Ж. А. Сартабанов

* aiman-80@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актюбе, Казахстан

Пусть $D_a = \partial_0 + \sum_{j=1}^m a_j \partial_j$ — оператор дифференцирования по многомерному времени $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ в направлении постоянного вектора $(1, a_1, \dots, a_m)$, где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $(j = 0, \dots, m)$. Далее будем считать $a = (a_1, \dots, a_m)$, $t_0 = \tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m$, вектор-функция $\sigma = t - a\tau$ — характеристика оператора D_a .

Исследуем вопрос о существовании периодических решений системы вида

$$D_a x = A(\tau, t, \sigma)x + f(\tau, t, \sigma, x). \quad (1)$$

Здесь $n \times n$ -матрица $A(\tau, t, \sigma)$ обладает свойством некритичности, т. е. при любых фиксированных (τ, t, σ) линейная однородная система, соответствующая системе (1), не имеет $(\theta(\sigma), \omega, \omega)$ -периодических решений, кроме нулевого. Также матрица $A(\tau, t, \sigma)$ и заданная n -вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ удовлетворяют условиям

$$A(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega) = A(\tau, t, \sigma) \in C_{\tau, t, \sigma}^{(0,1,1)}(R \times R^m \times R^m), \quad \forall k \in Z^m, \quad (2)$$

$$f(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega, x) = f(\tau, t, \sigma, x) \in C_{\tau, t, \sigma, x}^{(0,1,1,1)}(R \times R^m \times R^m \times R^n), \quad \forall k \in Z^m, \quad (3)$$

$k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ — кратный вектор-период, $\theta(\sigma)$ — некоторая положительно определенная ω -периодическая и непрерывно дифференцируемая функция

$$0 < \theta(\sigma + k\omega) = \theta(\sigma) \in C_\sigma^1(R^m), \quad \forall k \in Z^m,$$

причем $\theta(0) = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ — положительные рационально несоизмеримые постоянные.

Как видно из соотношений (2) и (3) матрица $A(\tau, t, \sigma)$ и вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ по переменной τ имеют период $\theta(\sigma)$, ω -периодично зависящий от характеристики $\sigma \in R^m$.

Заметим, что для исследования поставленного вопроса нам достаточно ограничиться решениями системы (1), которые удовлетворяют начальным условиям вида

$$x|_{\tau=0} = u(t) \in U, \quad (1_0)$$

где U — пространство непрерывно дифференцируемых ω -периодических n -вектор-функций с нормой $\|u\| = \sup |u(t)|$ при $t \in R^m$:

$$U = \{u(t) \mid u(t + k\omega) = u(t) \in C_t^1(R^m), \quad \forall k \in Z^m\},$$

$|\cdot|$ — знак евклидовой метрики.

Теперь введем пространство V n -вектор-функций $v(\tau, t, \sigma)$ таких, что

$$V = \{v(\tau, t, \sigma) \mid v(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega) = v(\tau, t, \sigma) \in C(R \times R^m \times R^m), \quad \forall k \in Z^m;$$

$$\|v\| = \sup |v(\tau, t, \sigma)| \leq \Delta, \quad (\tau, t, \sigma) \in R \times R^m \times R^m\},$$

где $\Delta = \text{const} > 0$.

Отсюда ясно, что U является подпространством пространства V с метрикой индуцированной метрикой пространства V .

Допустим, что единственное периодическое решение линейной системы

$$D_a x = A(\tau, t, \sigma)x + f(\tau, t, \sigma)$$

удовлетворяет оценке

$$\|x^*(\tau, t, \sigma)\| = \|[X^{-1}(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) - X^{-1}(\tau, t, \sigma)]^{-1} \int_{(\tau, \sigma)}^{(\tau + \theta(\sigma), t)} X^{-1}(h_0, h, \sigma) f(h_0, h, \sigma) ds\| \leq \eta \Delta$$

для всех $f \in V$, интегрирование проводится вдоль характеристики $h_0 = s$, $h = \sigma + as$, $\eta > 0$ — постоянная, которая ограничивает действующий на f оператор.

Тогда на основе [1] нетрудно показать, что $(\theta(\sigma), \omega, \omega)$ -периодическое решение системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(\tau, t, \sigma) = \int_{(\tau, \sigma)}^{(\tau + \theta(\sigma), t)} K(\tau, t, \sigma, h_0) f(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma)) ds, \quad (4)$$

где $K(\tau, t, \sigma, h_0) = [X^{-1}(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) - X^{-1}(\tau, t, \sigma)]^{-1} X^{-1}(h_0, h, \sigma)$ — ядро.

Определим оператор

$$(Tx)(\tau, t, \sigma) = \int_{(\tau, \sigma)}^{(\tau + \theta(\sigma), t)} K(\tau, t, \sigma, h_0) f(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma)) ds,$$

где вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ ограничена числом $M > 0$ при $x = 0$ и удовлетворяет условию Липшица относительно x с постоянной $L > 0$.

При выполнении условий

$$\eta L < 1, \quad \eta M \leq (1 - \eta L) \Delta \quad (4)$$

оператор T переводит пространство V в себя и является сжимающим. Следовательно, в силу полноты пространства V оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^*(\tau, t, \sigma) \in V$: $Tx^* = x^*$, которая является единственным периодическим решением интегрального уравнения (4).

Дифференцируемость решения $x^*(\tau, t, \sigma)$ по всем аргументам следует из условия (2) и (3). Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема При выполнении условий (2), (3) и (5) некритическая система (1) допускает единственное $(\theta(\sigma), \omega, \omega)$ -периодическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кульжумиева А. А., Сартабанов Ж. А. Многопериодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем и переменным периодом // Материалы Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры". 5-8 октября 2005. Брест. Ч. 1. С. 163–165.