

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

© И. А. Кузнецова

kirilina@samara-gsm.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $m > 0$, в конечной области D , ограниченной характеристиками уравнения (1)

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

$$AC_1 : x - \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC_1 : x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Пусть $D^+ = D \cap (y > 0)$, $D^- = D \cap (y < 0)$, I – интервал прямой $y = 0$. $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$, с характеристиками AC и BC_1 соответственно. Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача 1. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D^+ \cup I) \cap C^1(D^- \cup I) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} A_1 \left(I_{0+}^{a,b,\beta-1-a} U[\Theta_0(t)] \right) (x) + A_2 \left(I_{0+}^{a-\beta+1,b+2\beta-1,\beta-a-1} U_y(t, -0) \right) (x) &= \varphi_1(x), \\ B_1 \left(I_{1-}^{a_1,b_1,\beta-1-a_1} U[\Theta_1(t)] \right) (x) + B_2 \left(I_{1-}^{a_1-\beta+1,b_1+2\beta-1,\beta-a_1-1} U_y(t, +0) \right) (x) &= \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (2)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y), \quad (3)$$

где $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, B_1, B_2 – ненулевые действительные константы одного знака,

$$-\beta < a < 1 - \beta, b > 1, -\beta < a_1 < 1 - \beta, b_1 > 1. \quad (4)$$

$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f \right) (x)$ – обобщенный оператор дробного интегрирования [1]. $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – такие заданные функции, что

$$\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\bar{I}), 0 < a + \beta < \lambda_1 \leq 1, \varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\bar{I}), 0 < a_1 + \beta < \lambda_2 \leq 1.$$

Используя решения задачи Коши [2] для уравнения (1) в областях D^- и D^+ , найдем [3] $U[\Theta_0]$ и $U[\Theta_1]$ и подставим в краевые условия (2).

После преобразования получим

$$\nu_-(x) = \frac{1}{K_1} \left\{ \left(D_{0+}^{1-2\beta} \tau(t) \right) (x) - \left(D_{0+}^{1-2\beta} g_1(t) \right) (x) \right\},$$

$$\nu_+(x) = \frac{1}{K_2} \left\{ \left(D_{1-}^{1-2\beta} \tau(t) \right) (x) - \left(D_{1-}^{1-2\beta} g_2(t) \right) (x) \right\},$$

где $\tau(x) = \tau_-(x) = \tau_+(x)$,

$$g_1(x) = \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} \left(I_{0+}^{-(a+\beta), -b, 2\beta-1} \varphi_1(t) \right) (x), \quad g_2(x) = \frac{1}{B_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} \left(I_{1-}^{-(a_1+\beta), -b_1, 2\beta-1} \varphi_2(t) \right) (x).$$

Единственность решения задачи 1 следует из принципа экстремума гиперболических уравнений [4] и свойств дробных производных [5], а существование решения сводится к вопросу разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке

$$C_1 \mu(x) + \frac{C_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{t-x} dt = F(x),$$

где

$$C_1 = \frac{A_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) - A_2}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} - \frac{B_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} \cos 2\beta\pi, \quad C_2 = \frac{B_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} \sin 2\beta\pi,$$

$$\mu(x) = x^{1-2\beta} \nu(x), \quad F(x) = x^{1-2\beta} \left(D_{0+}^{1-2\beta} (g_2(t) - g_1(t)) \right) (x),$$

причем $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$.

Согласно теории сингулярных интегральных уравнений [6], сформулированы условия существования решения задачи 1, а само решение выписано в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, № 2. P. 135–143.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. С. 448.
3. Репин О. А. Нелокальная краевая задача для парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 23, № 1. С. 173–176.
4. Нахушев А. М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН Груз. ССР. 1975. Т. 77, № 3. С. 545–548.
5. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. A maximum principle for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type // Commun Pure and Appl. Math. 1953. V. 4. P. 455–470.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Н. и тех., 1987. С. 688.