

УДК 517.9

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ УСЛОВИЯХ НА ОТКРЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

© А. Р. Майков

a_maikov@phys.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Исследование возможности редукции начально-краевых задач, поставленных в пространственно неограниченных областях, к задачам в их ограниченных подобластях привлекает к себе все более широкий интерес в последние десятилетия. Это объясняется потребностью в эффективных методах численного моделирования нестационарных волновых процессов различной физической природы. Один из способов редукции основан на использовании так называемых условий на открытой границе, которые известны и под другими названиями — условий излучения, или безотражательных, или искусственных граничных условий. Схема использования условий на открытой границе может быть кратко описана следующим образом: из первоначальной неограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) искусственно выделяется ограниченная подобласть Ω_{int} , и на $S_{\text{open}} = \partial\Omega_{\text{int}} \setminus \partial\Omega$ ставятся упомянутые условия. Вместо исходной задачи, поставленной в $\Omega \times (0, T)$ (назовем ее Задачей I), в $\Omega_{\text{int}} \times (0, T)$ численно решается Задача II, которую составляют уравнения, начальные и граничные условия Задачи I вместе с условиями на S_{open} . известно

Далее мы ограничимся обсуждением лишь тех случаев, когда система описывается в области $\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_{\text{int}}$ уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + \gamma^2 U = 0, \quad 0 \leq \gamma \equiv \text{const}, \quad (1)$$

а в Ω_{int} — каким-либо более сложным образом. Будем предполагать, что геометрия $\partial\Omega_1$ и граничные условия допускают применение к (1) метода разделения переменных, и тем самым (1) сводится к последовательности независимых уравнений с одной пространственной переменной x , каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \left(\nu_j^2 + \frac{\mu_j^2 - 1/4}{x^2} \right) u_j = 0, \quad x > x_1, t \in (0, T) \quad (2)$$

с константами $\nu_j \geq \gamma$ и $\mu_j \geq 0^*$. Можно показать, что если U — достаточно гладкая функция и $U|_{t=0} = \partial U / \partial t|_{t=0} = 0$, то имеют место равенства

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) u_j(x_1, \tau) d\tau = 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{K}(t) \equiv \mathcal{K}(t; x_1, \nu, \mu)$ — функция из $L^1(0, \infty)$, преобразование Фурье которой по t нетрудно найти аналитически. Эти равенства можно было бы использовать в качестве точных условий

*Примерами областей, для которых возможен переход от (1) к уравнениям (2), служат полубесконечный регулярный волновод произвольного сечения, полубесконечные рупоры или внешность шара, а также полупространство $x^1 > 0$ в прямоугольной декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3) , если U удовлетворяет в этом полупространстве условиям периодичности по x^2 и по x^3 . Если $d = 2$, то примерами могут служить плоские аналоги перечисленных областей.

для U на открытой границе (поверхности $x = x_1$), аналогично тому, как используются парциальные условия излучения [1] при решении численном решении уравнения Гельмгольца. Однако из-за нелокального по времени характера (3) вычислительные затраты оказались бы чрезвычайно высокими. В [2] был предложен существенно более экономичный класс алгоритмов, основанных на использовании приближенных условий. Последние получаются из (3) заменой $\mathcal{K}$ аппроксимирующими их функциями $\tilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t)$ некоторого специального вида.

Результаты численного решения ряда задач свидетельствуют о перспективности такого подхода; в то же время вопросы корректности приближенных условий (существования и единственности решения Задачи II, сходимости его к решению Задачи I) изучены еще недостаточно. По этой причине интересным представляется исследование указанных вопросов применительно к следующей модельной начально-краевой задаче, поставленной в полуполосе $x > x_0$, $t \in (0, T)$:

$$Lu = f(x, t), \quad l[u] = g(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (4)$$

где $L\eta := \rho(x)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x)\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\nu^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x) \right) \eta$, $l[\eta] := -\frac{\partial \eta}{\partial x}(x_0, t) \sin \alpha + \eta(x_0, t) \cos \alpha$; α, ν, μ — константы, причем $\nu, \mu \geq 0$; $f \in L^2((x_0, \infty) \times (0, T))$, $g \in L^2(0, T)$, $u_0 \in W_2^1(0, \infty)$, $u_1 \in L^2(0, \infty)$, $\rho, k \in C^2([x_0, \infty))$, $q \in C([x_0, \infty))$, причем для некоторого $x_1 > x_0$ справедливо $f(x, t) = u_0(x) = u_1(x) = q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = k(x) \equiv 1$ при $x \geq x_1$ и $\inf_{x \in (x_0, x_1)} k(x) > 0$, $\inf_{x \in (x_0, x_1)} \rho(x) > 0$. Пусть $\tilde{u}$ — функция, заданная в прямоугольнике $(x_0, x_1) \times (0, T)$, удовлетворяющая в нем (4) и, кроме этого, приближенным условиям на открытой границе $x = x_1$:

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \tilde{\mathcal{K}}(t - \tau) \tilde{u}(x_1, \tau) d\tau = 0$, причем вид $\tilde{\mathcal{K}}$ не обязательно такой, как в [2].

Через $W_p^m(\cdot)$ ($m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$) будем обозначать пространства Соболева, через $F[\cdot]$ — преобразование Фурье на $\mathbb{R}$, через X — интервал (x_0, x_1) . Будем предполагать, что $m \geq 2$, и что при $m \geq 3$ в дополнение к перечисленным выше выполнены условия $\rho, q \in W_\infty^{m-2}(X)$, $k \in W_\infty^{m-1}(X)$. Кроме того, потребуем, чтобы в системе, описываемой (4), были невозможны резонансы (более детальную формулировку этого условия см. в [3]). В этом случае, как показано в [3],

1. если решение $u \in W_2^m(X \times (0, T))$ задачи (4) существует, то для любой $\tilde{\mathcal{K}} \in L^1(0, T)$ решение $\tilde{u}$ соответствующей задачи с приближенными условиями существует и единственно в $W_2^m(X \times (0, T))$;

2. $\|\tilde{u} - u\|_{W_2^m(X \times (0, T))} = O\left(\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \|u\|_{W_2^m(X \times (0, T))}\right)$ при $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \rightarrow 0$;

3. если $\tilde{\mathcal{K}}$ допускает представление $\tilde{\mathcal{K}} = F[\tilde{\mathcal{K}}]$, где $\tilde{\mathcal{K}} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, то

$\|\tilde{u} - u\|_{W_2^m(X \times (0, T))} = O\left(\|\tilde{\mathcal{K}} - F^{-1}[\mathcal{K}]\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{W_2^m(X \times (0, T))}\right)$.

Оценки п. п. 2 и 3 являются равномерными относительно $T \in (0, \infty)$.

Аналогичные оценки справедливы для $\|u - \tilde{u}\|_{W_\infty^m}$ и, по-видимому, для $\|u - \tilde{u}\|_{C^m}$. Равномерность оценок по T указывает на принципиальную возможность построения приближенных ядер $\tilde{\mathcal{K}}^{(j)}$, пригодных для использования в (3) вместо $\mathcal{K}$ при сколь угодно больших T ; в пользу этого говорят и результаты проведенных тестовых расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А. Г. Принцип излучения // Докл. АН СССР. 1950. Т. 3, № 5. С. 517–520.
2. Sofronov I. L. Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. 1998. Т. 221. С. 92–115.
3. Майков А. Р. О приближенных условиях на открытой границе для одного класса гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46, № 6. С. 1080–1095.