Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 220–221

УДК 517.934

О ДИНАМИЧЕСКОМ ОБРАЩЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

© В. И. Максимов

maksimov@imm.uran.ru

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В докладе обсуждаются задачи динамического обращения для систем с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальнвми включениями. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ рассмотрим смешанную граничную задачу

$$x_t(t,\eta) - \Delta_L x(t,\eta) + a_0(\eta)x(t,\eta) + \beta(x(t,\eta) - \psi(\eta)) \ni (Bu(t))(\eta) + f(t,\eta) \quad \text{на} \quad Q = T \times \Omega, \quad (1)$$

$$\alpha_1 x(t,\sigma) + \alpha_2 \partial x(t,\sigma)/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times (t_0, \vartheta)$$

с начальным условием

$$x(t_0,\eta) = x_0(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta \in \Omega.$$

Здесь $T = [t_0, \vartheta]$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\psi \in H^2(\Omega)$, $f(\cdot) \in L_2(Q)$, β — максимально монотонный граф на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $0 \in D(\beta) = \{z \in \mathbb{R} : \beta(z) < +\infty\}$, $\partial x/\partial n$ — производная по внешней нормали, $\Delta_L x = \sum_{i=0}^n \partial^2 x/\partial \eta_i^2$ — оператор Лапласа, $(U, |\cdot|_U)$ — равномерно выпуклое банахово пространство, $B \in \mathcal{L}(U; H)$ — линейный непрерывный оператор, $H = L_2(\Omega)$. Включения (1) используются для описания процесса управления термостатом, параболической задачи с препятствием, задачи Сигнорини и т.д.

Пусть выполнено

Условие. Справедливы соотношения

a) $\psi(\sigma) \equiv 0$ или $\alpha_1\psi(\sigma) + \alpha_2 \partial\psi(\sigma)/\partial n \leqslant 0$ п. в. на Γ и $\beta_\lambda(r) \leqslant 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$ при $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_\lambda(-\psi(\sigma)) = 0$ п. в. на Γ при $\alpha_2 = 0$;

b) $\alpha_1/\alpha_2 > 0$ при $\alpha_2 > 0$.

Здесь $\beta_\lambda = \lambda^{-1}(1 - (1 + \lambda\beta)^{-1})$ — аппроксимация Иосиды β.

Тогда для любых $u(\cdot) \in L_2(T; U)$) существует единственное решение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ включения (1) со следующими свойствами:

$$x(\cdot) \in W(T) \cap C(T; V) \cap L_2(T; H^2(\Omega)), \quad x(t) \in D(\varphi) = \{x \in H : \varphi(x(t)) < +\infty\}$$

$$\forall t \in T, \quad t \to \varphi(x(t)) \in AC(T).$$

Здесь $AC(T)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $z(\cdot) : T \to \mathbb{R}$, $W(T) = \{z(\cdot) \in L_2(T; H) : z_t(\cdot) \in L_2(T; H)\}$.

Остановимся на одной из обсуждаемых задач. Пусть решение включения (1) $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ зависит от изменяющегося во времени неизвестного возмущения $u(\cdot) \in L_2(T; U)$. Функция $x(\cdot)$ также неизвестна. В моменты $t \in T$ фазовое состояние $x(t)$ измеряется с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\xi^h(t) \in H$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi^h(t) - x(t)|_H \leqslant h.$$

Здесь $h \in (0,1)$ — величина информационной погрешности. Задача динамического обращения состоит в построении алгоритма, который позволяет восстановить неизвестный вход (возмущение) $u = u(\cdot)$ в "реальном времени".

Для решения задачи может быть использован подход, основанный на методе вспомогательных позиционно-управляемых моделей [1, 2]. При этом законы выбора управлений в моделях основываются на тех или иных модификациях принципа экстремального сдвига Н. Н. Красовского [3].

Наряду с включением (1), введем еще одно включение (назовем его, следуя [1, 2], моделью):

$$w_t^h(t,\eta) - \Delta_L w^h(t,\eta) + a_0(\eta)w^h(t,\eta) + \beta(w^h(t,\eta) - \psi(\eta)) \ni (Bu^h(t))(\eta) + f(t,\eta) \quad \text{на} \quad Q = T \times \Omega,$$
$$\alpha_1 w^h(t,\sigma) + \alpha_2 \partial w^h(t,\sigma)/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times (t_0,\vartheta) \tag{2}$$

с начальным условием
$$w^h(t_0,\eta) = w_0^h(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta \in \Omega.$$

Пусть $u_*(\cdot; x(\cdot))$ означает элемент минимальной $L_2(T;U)$-нормы из множества $U_*(x(\cdot))$ всех функций $u(\cdot) \in L_2(T;U)$, порождающих решение $x(\cdot)$, т. е.

$$u_*(\cdot; x(\cdot)) = \arg\min\{|u(\cdot)|_{L_2(T;U)} : u(\cdot) \in U_*(x(\cdot))\},$$

где
$$U_*(x(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T;U) : x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))\}.$$

Обсуждаемая задача сводится к задаче конструирования закона управленияпо принципу обратной связи $u^h(t) = \mathcal{U}(t, \xi^h(t), w^h(t))$ такого, что имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \to u_*(\cdot; x(\cdot)) \text{ в } L_2(T;U) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Для решения задачи введем функцию $\alpha(h) : (0,1) \to \mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$ со свойствами

$$\alpha(h) \to 0, \quad h^{2/3}\alpha^{-1}(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{3}$$

Закон формирования управления $u^h(t)$ зададим по правилу $\mathcal{U} : T \times H \times H \to U$:

$$\mathcal{U}(t, \xi^h(t), w^h(t)) = \alpha^{-1}(h) B^*(\xi^h(t) - w^h(t)), \tag{4}$$

где $(t, \xi^h(t), w^h(t))$, символ B^* означает сопряженный оператор, а символ $w^h(\cdot)$ — решение включения (2) с управлением $u^h(\cdot)$, определенным согласно (4).

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3)*. Тогда управление* $u^h(\cdot)$ *решает задачу динамического обращения.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00008), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН 22 “Процессы управления”, Урало-Сибирского междисциплинарного проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Osipov Ju. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Gordon and Breach, London, 1995.
2. *Maksimov V. I.* Dynamical Inverse Problems of Distributed Systems. VSP, 2002.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.