

УДК 517.92

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© М. Ш. Маматов

mamatovmsh@mail.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

1. Рассматриваются следующая игровая задача, описываемая уравнением

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -u(x, t) + v(x, t), \quad (5)$$

$$\bar{P} = \{u : |u| \leq \rho, \rho > 0\}, \quad \bar{Q} = \{v : |v| \leq \sigma, \sigma > 0\}, \quad (x, t) \in D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\},$$

$$z(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

$$z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

где u, v — управляющие параметры, u — управление преследования, v — управления убегающие. Далее, в R выделено непустое терминальное множество $\bar{M}$. Игра (1)–(3) считается завершённой, если $z(x, t_0) \in \bar{M}$, $0 < a \leq x \leq b < 1$, и для некоторого $t = t_0$, $t_0 \leq T$.

Предположим, что существует и притом единственное достаточно гладкое решение $z(x, t)$ задачи (1)–(3) при любых допустимых значениях управляющих параметров $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$.

2. В области D выберем сеть узловых точек (x_k, t_k) на пересечении координатных линий $x = x_i$, $x_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$; $t = t_k$, $t_k = kl$, $l = \frac{T}{K}$.

$$\frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{l} = \frac{z_{i-1,k} - 2z_{i,k} + z_{i+1,k}}{h^2} - u_{i,k} + v_{i,k}, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, r-1;$$

$$z_{i,0} = f(ih), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9)$$

$$z_{0,k} = z_{n,k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (10)$$

где $u_{i,k} = u(ih, kl) \in \bar{P}$, $v_{i,k} = v(ih, kl) \in \bar{Q}$ — управляющие параметры.

Уравнение (4) является простейшим из всех известных разностных уравнений, соответствующих (1).

Решение дискретной задачи (4)–(6) осуществляется следующим образом. По известным начальным значениям $z_{i,0}$ и $u_{i,0}$, $v_{i,0}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) вычисляются в любом порядке по формуле (4) значения $z_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Далее, по найденным значениям $z_{i,1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и известным граничным значениям $z_{0,1}$ и $z_{n,1}$ вычисляются по той же формуле (4) значения $z_{i,2}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и так далее. Определение значений искомой функции по формуле (4) на $(k+1)$ -м слое ($(k+1)$ -м слоем мы будем называть совокупность узлов $x = ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $t = (k+1)l$) по ее значениям на k -м слое и граничным значениям $z_{0,k}$ и $z_{n,k}$ и есть процесс решения “по шагам”.

3. Теперь для удобства запишем задачу (4)–(6) в матричном виде

$$z_{k+1} = Cz_k - lu_k + lv_k, \quad k = 0, 1, \dots, r-1; \quad z_0 = f,$$

где z_k — искомые матрицы-столбцы $\{z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{n-1,k}\}$, $u_k = \{u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{n-1,k}\}$, $v_k = \{v_{1,k}, v_{2,k}, \dots, v_{n-1,k}\}$, $f = \{f(h), f(2h), \dots, f((n-1)h)\}$ — начальный вектор, C — $(n-1)$ -мерная квадратная Якобиева (трехдиагональная) матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & \dots & 0 \\ \frac{l}{h^2} & 1 - \frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{l}{h^2} & 1 - \frac{2l}{h^2} \end{pmatrix}$$

4. Ясно, что в игре (7) $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство R^{n-1} , M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0 в R^{n-1} . Через Π обозначим матрицу ортогонального проектирования из R^{n-1} на L , через $A+B$ и $A \pm B$ — соответственно алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A, B ,

$$P = \underbrace{\overline{P} \times \overline{P} \times \dots \times \overline{P}}_{n-1}, \quad Q = \underbrace{\overline{Q} \times \overline{Q} \times \dots \times \overline{Q}}_{n-1}.$$

Пусть $W(0) = \{0\}$, $W(m) = \sum_{i=0}^{m-1} [\Pi C^i l P \pm \Pi C^i l Q]$ для $m = 1, 2, \dots$, $W_1(m) = M_1 + W(m)$ для всех $m = 0, 1, \dots$

Теорема. Предположим, что N — наименьшее из тех чисел m , для каждого из которых имеет место включение $\Pi C^m z_0 \in W_1(m)$. Тогда из точки z_0 можно завершить преследование за N шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сатимов Н. Ю., Маматов М. Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференциальные уравнения. 1990 Т. 26, № 9. С. 1541–1551.
2. Маматов М. Ш. Об одной задаче преследования, управляем разностными уравнениями второго порядка // Труды международной конференции “Современные проблемы математической физики и информационных технологии”. Ташкент, 2005. Т. 2. С. 22–25.