

УДК 517.95

НЕОБХОДИМЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФFUЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© М. О. Мамчурев

mamchuev@rambler.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$, рассмотрим диффузионно-волновое уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где D_{0t}^γ — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования порядка γ ([1, с. 9]), $\alpha \in (0, 2)$.

Пусть $n \in \{1, 2\}$ таково, что $n - 1 < \alpha \leq n$. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω называется функция $u = u(x, y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) \in C(\Omega)$, $1 \leq k \leq n$, $u_{xx}(x, y), D_{0y}^\alpha u(x, y) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, y) \in \Omega$ ([2, с. 103]).

Рассмотрим операторы $\mathcal{N}_{0l}^{\theta, x, y}$ и $\mathcal{R}_{0y}^{\delta, x}$, которые действуют по формулам

$$\mathcal{N}_{0l}^{\theta, x, y} \nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\nu(\xi)}{y^{1-\theta}} e_{1, \beta}^{1, \theta} \left(-\frac{|x - \xi|}{y^\beta} \right) d\xi, \quad \mathcal{R}_{0y}^{\delta, x} \mu(y) = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{\mu(\eta)}{(y - \eta)^{1-\delta}} e_{1, \beta}^{1, \delta} \left(-\frac{|x|}{(y - \eta)^\beta} \right) d\eta,$$

где $\beta = \alpha/2$, $e_{\alpha, \beta}^{\mu, \delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu) \Gamma(\delta - \beta n)}$ — функция типа Райта ([2]).

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $u = u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 < x < l,$$

производная u_x непрерывна вплоть до участков границы $x = 0$ и $x = l$ и $u_x(0, y), u_x(l, y) \in L[0, T]$. Тогда функция $u(x, y)$ удовлетворяет нелокальным условиям:

$$u(0, y) = 2 \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1, 0, y} \tau_k(\xi) + 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta, l} u_x(l, \eta) - D_{0y}^{-\beta} u_x(0, \eta) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0, l} u(l, \eta), \quad (2)$$

$$u(l, y) = 2 \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1, l, y} \tau_k(\xi) - 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta, l} u_x(0, \eta) + D_{0y}^{-\beta} u_x(l, \eta) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0, l} u(0, \eta). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\alpha = 1$ условия (2) и (3) совпадают с необходимыми нелокальными условиями для уравнения Фурье ([3, с. 275]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96625-р_юг_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псту А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
3. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.