Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 225–226

УДК 517.958

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ БИНГАМА

© А. Е. Мамонтов

relic@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Уравнения движения вязких (включая неньютоновские) сжимаемых жидкостей имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})=0,\qquad \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=\mathrm{div}\mathbb{P}_r+\rho\mathbf{f};\tag{1}$$

здесь ρ — плотность жидкости, $\mathbf{u}$ — скорость, $\mathbf{f}$ — заданные внешние силы, $\mathbb{P}_r$ — тензор напряжений, div — оператор дивергенции по пространственным переменным $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, а t — время. Жидкость Бингама [1, 2] характеризуется тем, что в ней при малых напряжениях тензор скоростей деформаций $\mathbb{D}=\mathrm{Sym}(\nabla\otimes\mathbf{u})$ равен 0, т. е. в областях с малыми $\mathbb{P}_r$ (за вычетом шаровой части) движение твердотельное — строго говоря, такие среды не являются жидкостями в смысле аксиом (постулатов) Стокса [3]. Эта модель находит свое применение при изучении движений таких сред, как пасты, цементы, суспензии, некоторые виды нефтей, и др. [4, 5]. Таким образом, жидкость Бингама описывается определяющим уравнением (замыкающим систему (1)) вида

$$\mathbb{P}_r=\mathbb{P}_f+\mathbb{P}_b,\tag{2}$$

где $\mathbb{P}_f$ — тензор напряжений стоксовой (т. е. удовлетворяющей аксиомам Стокса) жидкости, а $\mathbb{P}_b$ есть многозначная функция от $\mathbb{D}$, задаваемая формулой

$$\mathbb{P}_b=p_*\begin{cases}\mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D}\neq 0,\\ \text{любой из }\overline{\mathcal{P}}, & \mathbb{D}=0.\end{cases}\tag{3}$$

Здесь $\mathcal{P}$ — некоторая ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{S}_n$ симметричных тензоров ранга 2, действующих в $\mathbb{R}^n$, причем $0\in\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ вписана в единичный шар пространства $\mathbb{S}_n$; $p_*\geqslant 0$ — заданное (постоянное) пороговое напряжение, а $\mathbb{T}$ — тензорное поле, действующее из единичной сферы $S_1\subset\mathbb{S}_n$ в $\partial\mathcal{P}$. Другими словами, $p_*\mathcal{P}$ есть область напряжений, соответствующих твердотельному движению, а $\mathbb{T}$ определяет связь напряжений и скоростей деформаций при выходе напряжений в критическую зону $p_*\partial\mathcal{P}$. Значение $p_*=0$ соответствует $\mathbb{P}_b\equiv 0$, т. е. стоксовой жидкости. Рассмотрение общей (анизотропной) формы (3) не требует серьезных дополнительных усилий по сравнению с изотропной (когда $\mathcal{P}$ есть единичный шар в $\mathbb{S}_n$, а $\mathbb{T}$ — тождественное отображение), обычно рассматриваемой в литературе. Вопрос о разрешимости в целом по времени задач для системы (1)–(3) до сих пор изучался (при $p_*>0$) только для случая одномерных движений ($n=1$) или для несжимаемой жидкости (см., например, работы [6–8] и библиографии в них).

В представленной работе доказано существование в целом решений задачи для системы (1)–(3), описывающей движение в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, т. е. задачи в цилиндре $Q_T=\Omega\times(0,T)$ с условием прилипания:

$$\rho|_{t=0}=\rho_0\geqslant 0;\quad \rho\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{w}_0;\quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0.\tag{4}$$

При этом мы опираемся на результат [9, 10], полученный для этой задачи в случае $p_*=0$. Буквальное повторение тех же результатов для $p_*>0$ затруднительно, т. к. тогда (2) определяет многозначную функцию от $\mathbb{D}$. Мы избрали более естественный путь (аналогично тому, как это делалось в [6] для случая $n=1$): регуляризация бингамовского тензора $\mathbb{P}_b$ и сведéние его к стоксовому, с последующим предельным переходом в построенных на основе [9, 10] решениях регуляризованной задачи. Это удобно еще и потому, что позволяет отследить появление «твердотельных зон» (где $\mathbb{D}=0$) и поведение в них напряжений.

Следуя [9, 10], мы задаем стоксову часть $\mathbb{P}_f$ тензора $\mathbb{P}_r$ в виде $\mathbb{P}_f = -\rho\mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbf{u})$ (т. е. давление $p(\rho)=\rho$), где $\mathbb{P}$ удовлетворяет лишь требованиям типа коэрцитивности, монотонности, непрерывности и выпуклости (возможны и нелокальные формы). В качестве примера можно указать уравнения напряженного состояния классических неньютоновских жидкостей при достаточно быстром росте вязкости как функции от $\mathbb{D}$. Бингамовский член $\mathbb{P}_b$ берется в виде (3), при этом от $\mathbb{T}$ требуются непрерывность и выполнение неравенств $\mu(\mathbb{B}_1) \equiv \mathbb{T}(\mathbb{B}_1) : \mathbb{B}_1 > 0$, $\mathbb{T}(\mathbb{B}_2) : \mathbb{B}_1 \leqslant \mathbb{T}(\mathbb{B}_1) : \mathbb{B}_1 = \mu(\mathbb{B}_1)$ при всех $\mathbb{B}_{1,2} \in S_1$. Тривиальный пример дается упомянутым изотропным случаем, когда $\mu \equiv 1$. Имеются и нетривиальные примеры пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$ (т. е. анизотропных $\mathbb{P}_b$).

Решение строится в функциональных пространствах Орлича. В частности, используется пространство $Y = \{\, \mathbf{v} \mid \mathbb{D}(\mathbf{v}) \in L_M(Q_T),\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \,\}$ (здесь M — достаточно быстро растущая N-функция) и N-функции $\Phi_\gamma(s) = (1+s)\ln^\gamma(1+s)$, $\Psi_\gamma = \overline{\Phi}_\gamma$.

Теорема. *Пусть произвольно заданы* $T>0$ *и входные данные класса* $\mathbf{f} \in K_{\Psi_{\beta/2}}(Q_T)$, $\rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$, $\mathbf{w}_0/\rho_0 \in L_{\Psi_{\beta/2}}(\mathrm{supp}\rho_0)$, $\beta > 7/2$. *Тогда задача (1)–(4) имеет в* Q_T *решение класса* $\rho \in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, $\rho \geqslant 0$, $\mathbf{u} \in Y$, *удовлетворяющее энергетическому равенству*

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho\ln\rho\right) d\mathbf{x}\,\Bigg|_0^t + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[(\mathbb{P}(\mathbf{u}) + \mathbb{P}_b(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\right] d\mathbf{x}ds = 0 .$$

Уравнения (1) выполняются на множестве $\{\mathbb{D}=0\}$ *в том смысле, что величина* $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ *есть вполне определенный тензор со значениями из* $p_*\overline{\mathcal{P}}$. *Решение есть предел решений задач с аппроксимирующими стоксовыми тензорами, сходящихся к нему сильно в соответствующих пространствах, за исключением слабой сходимости величин* $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ *в твердотельных зонах.*

Доказательство теоремы основано на энергетических равенствах для приближенных и точного решений и на соображениях монотонности, приспособленных к случаю разрывных и многозначных функций. Интересно отметить, что значения $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ в твердотельных зонах «размазываются» по всему множеству $p_*\overline{\mathcal{P}}$ в процессе перехода к слабому пределу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bingham E. C.* Fluidity and Plasticity. New York, McGrew—Hill Book Co., 1922.
2. *Prager W.* Introduction to Mechanics of Continua. New York, Ginn and Co., 1961.
3. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд. иностр. лит., 1963.
4. *Prasad D., Kytomaa H. K.* Particle stress and viscous compaction during shear of dense suspensions // Intern. J. of Multiphase Flow. Sep. 1995. V. 21, N 5. P. 775–785.
5. *Malvern L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey, Prentice—Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1969.
6. *Basov I. V., Shelukhin V. V.* Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows // Z. Angew. Math. Mech. 1999. V. 79, N 3. P. 185–192.
7. *Shelukhin V. V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids // J. of math. fluid mechanics, 2002. V. 4. P. 109–127.
8. *Málek J., Růžička M., Shelukhin V. V.* Hershel – Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows // Math. models and methods in appl. sciences, 2005. V. 15, N 12. P. 1845–1861.
9. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье – Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40, № 2. С. 408–420.
10. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье – Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 635–649.