

УДК 517.95

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© М. В. Мендзив

menmar@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск

Работа является продолжением исследований, выполненных в [1, 2]. Признаки устойчивости из этих работ распространены на системы с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Условия на матрицы, отвечающие за устойчивость, существенно ослаблены по сравнению с [1, 2].

1. Рассмотрим в области $\Pi = [0, 1] \times [0, \infty)$ краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, t) \right) u = 0, & u|_{t=0} = h(x), \\ u_+(0, t) = P_0 u_-(0, t), & u_-(1, t) = P_1 u_+(1, t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u : \Pi \rightarrow \mathbb{C}^N$, $A, B : \Pi \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$, $A, B \in C^1(\Pi)$, P_i — гладкие на $[0, \infty)$ матрицы соответствующих размеров,

$$A(x, t+T) = A(x, t), \quad B(x, t+T) = B(x, t), \quad P_i(x, t+T) = P_i(x, t), \quad T > 0, \quad (2)$$

$A = \text{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n)$, $a_1 > \dots > a_m > 0 > a_{m+1} > \dots > a_n$, I_k — единичная матрица порядка N_k , $\sum N_k = N$, $h_0 \in C^1([0, 1])$, $u = \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, \dots, u_m)^\tau \\ (u_{m+1}, \dots, u_n)^\tau \end{bmatrix}$, u_k — строка размера N_k , τ — знак транспонирования, выполняются условия согласования нулевого и первого порядков

$$\begin{cases} [h_0^+ - P_0(0)h_0^-]_{x=0} = 0, [h_0^- - P_1(0)h_0^+]_{x=1} = 0, \\ [h_1^+ - P_0(0)h_1^- + P_0'(0)h_0^-]_{x=0} = 0, [h_1^- - P_1(0)h_1^+ + P_1'(0)h_0^+]_{x=1} = 0, \\ h_1 = (Ah_0' + Bh_0)_{t=0}. \end{cases} \quad (3)$$

При указанных условиях задача (1) однозначно разрешима в классе гладких функций.

Обозначим H линейал гладких функций $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условиям (3), со скалярным произведением $\langle g, h \rangle = \int_0^1 h^* g \, dx$ и нормой $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$. Ограничение решения $u(x, t)$ задачи (1) на каждую горизонталь $t = \text{const}$ — элемент H ; будем обозначать его $u(t)$.

Будем говорить, что решение $u = 0$ краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво, если существуют такие постоянные $\mu > 0$, $\nu > 0$, что для любого решения задачи (1) верна оценка

$$\|u(t)\| \leq \mu e^{-\nu t} \|h\|, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Построим по фиксированной гладкой матрице

$$G = \text{diag}(G_1, \dots, G_n)$$

с диагональными блоками порядков $N_1, \dots, N_n$ со свойствами

$$G^* = G, \quad G(x, t + T) = G(x, t), \quad m_1 I \leq G \leq m_2 I \quad (m_k > 0),$$

матрицы

$$F(x, t) = G'_t + (GA)'_x - GB - B^*G,$$

$$F_0(t) = [(GA)_- + P_0^*(GA)_+ P_0]_{x=0},$$

$$F_1(t) = [(GA)_+ + P_1^*(GA)_- P_1]_{x=1},$$

где $(GA)_+ = \text{diag}(a_1 G_1, \dots, a_m G_m)$, $(GA)_- = \text{diag}(a_{m+1} G_{m+1}, \dots, a_n G_n)$.

Теорема 1. Пусть существует матрица $G(x, t)$ с указанными выше свойствами такая, что выполняются неравенства

$$a) F \leq 0 \quad (t \geq 0), \quad F \leq -mI \quad (m = \text{const} > 0) \quad \text{хотя бы при одном } t_0 \geq 0,$$

$$b) F_0 \leq 0, \quad F_1 \geq 0 \quad \text{при } t \geq 0.$$

Тогда решение $u = 0$ краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво.

2. Рассмотрим в полуплоскости $t \geq 0$ задачу Коши

$$Lu = 0, \quad u \Big|_{t=0} = h(x), \tag{5}$$

где L — оператор (1) с матрицами (2), h — гладкая финитная функция со значениями в $\mathbb{C}^N$. В этом случае ограничение решения $u(x, t)$ задачи Коши (5) на каждую горизонталь $t = \text{const}$ — также гладкая финитная функция. Решение $u = 0$ задачи (5) будем называть экспоненциально устойчивым, если при некоторых $\mu, \nu = \text{const} > 0$ для любого решения $u(t)$ задачи (5) справедлива оценка (4).

Теорема 2. Для экспоненциальной устойчивости решения $u = 0$ задачи (5) достаточно существование матрицы G с указанными свойствами такой, что выполняются неравенства

$$a) F \leq 0 \quad \text{при } t \geq 0,$$

$$b) F \leq -mI \quad (m > 0) \quad \text{хотя бы на одном отрезке } [t_0, t_1], \quad t_0 \geq 0.$$

Заметим, что в случае любых гладких A, B требование на матрицу F должно быть усилено: $F \leq -mI \quad (t \geq 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьева Е. В., Романовский Р. К. Об устойчивости решений задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1290–1292.
2. Романовский Р. К., Воробьева Е. В., Макарова И. Д. Об устойчивости решений смешанной задачи для почти линейной системы на плоскости // Сиб. журн. индустриальной математики. 2003. Т. VI, № 1 (13). С. 118–124.