

УДК 517

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© И. З. Меражов

maths@sibupk.nsk.su

*Институт вычислительной математики и математической геофизики,
Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск*

Рассмотрена полная система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости состоящая из следующих уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений с компонентами $u_i = u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ — вектора электрической и магнитной напряженности с компонентами $E_i = E_i(x, t)$, $H_i = H_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, $D = (D_1, D_2, D_3)$ — вектор электрической напряженности с компонентами $D_i = D_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$.

Для тензоров напряжений $T_{ij}(x, t)$ и деформаций $S_{kl}(x, t)$ и компонент электрической индукции $D_j(x, t)$ имеют место представления:

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} S_{kl} - \sum_{k=1}^3 e_{kij} E_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$D_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{jk} E_k + \sum_{k,l=1}^3 e_{jkl} S_{kl}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $e_{kij} = e_{kij}(x)$ — пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x)$ — диэлектрические модули, $\mu = \mu(x)$ — магнитная проницаемость.

Систему (1), (2) будем рассматривать совместно с условиями

$$u|_{t<0} = 0, \quad E|_{t<0} = 0, \quad H|_{t<0} = 0, \quad (6)$$

Система (1), (2) описывает распространение связанных электроупругих волн. Связь упругих и электрических процессов определяется пьезоэлектрическими модулями среды. Так как тензоры c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{ij} удовлетворяют следующим условиям симметричности

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji},$$

удобно ввести новые обозначения, т. е. пару индексов (ij) , относительно которых тензоры симметричны, заменим одним индексом p , принимающим значения от 1 до 6. Упорядочения здесь следующее:

$$(11) \rightarrow 1, \quad (22) \rightarrow 2, \quad (33) \rightarrow 3, \quad (23) = (32) \rightarrow 4, \quad (13) = (31) \rightarrow 5,$$

$$(12) = (21) \rightarrow 6, \quad c_{ijkl} = c_{pq}, \quad e_{kij} = e_{kp}.$$

Набор характеристик электромагнитоупругой среды дается в литературе в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{\alpha\beta}(6 \times 6) & e_{\alpha k}(6 \times 3) \\ e_{k\alpha}(3 \times 6) & \varepsilon_{ij}(3 \times 3) \end{pmatrix}.$$

В данной работе рассмотрены анизотропные среды кубической, тетрагональной и гексогональной структуры.

Показано, что систему электромагнитоупругости (1), (2) можно записать в виде t -гиперболической, симметрической по Фридрихсу системы уравнений первого порядка, т. е. в виде

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + QU = 0.$$

В области $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, H]$ рассмотрена симметрическая t -гиперболическая по Фридрихсу система дифференциальных уравнений первого порядка со следующим начальным условием и граничными условиями:

$$U|_{t=0} = 0, \quad G_1 U|_{x_3=0} = g_1(x_1, x_2, t), \quad G_2 U|_{x_3=H} = g_2(x_1, x_2, t).$$

Предполагается, что в данной области функции входящие в $A_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, представлены в виде постоянной и малой добавки к ней, зависящей от всех трех переменных. Следовательно матрицы тоже представится в виде суммы

$$A_j = B_j^0 + B_j^1(x), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

и решение будем искать в виде

$$U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t),$$

где $U_0(x, t)$ — решение задачи с постоянными коэффициентами, нулевой правой частью и неоднородными граничными условиями, а $U_1(x, t)$ — решение задачи с постоянными коэффициентами, однородными граничными условиями и правую часть входит решение $U_0(x, t)$.

Прямая линеаризованная задача заключается в нахождении $U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t)$, а обратная задача — в нахождении неизвестных коэффициентов входящие в матрицу $B_j^1(x)$.

Основные результаты работы составляют теоремы существования и единственности решения прямой и обратной многомерных линеаризованных задач для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости, а также получены оценки устойчивости решения многомерной линеаризованной обратной задачи.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-05-64081.