*Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 234–235*

*УДК 517.956.6*

# ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

**© Г. М. Мирсабурова**

*Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m\,u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \quad m > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области $\Omega$ комплексной плоскости $z = x+iy$, ограниченной нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A = A(-1,0)$ и $B = B(1,0)$ и характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения (1).

В задаче Трикоми во всех точках характеристики $AC$ задается значение искомой функции: $u(x,y)|_{AC} = \psi(x)$. В настоящей работе исследуется корректности задачи, где часть характеристики $AC$ освобождена от краевого условия и это не достающее условие Трикоми эквивалентно заменена нелокальным условием Франкля [1] на отрезке вырождения $AB$. Обозначим через $\Omega^+$ и $\Omega^-$ части области $\Omega$, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через $C_0$ и $C_1$ соответственно точки пересечения характеристик $AC$ и $BC$ с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$ — интервал оси $y = 0$. Пусть $p(x) \in C^2[-1,c]-$ диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ в множества точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$.

Задача $TF$. Требуется найти в области $\Omega$ функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$;
2. $u(x,y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3. $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1$ [2] ($\tau'(x)$, $v(x) \in H$, определение для $\tau(x)$ и $v(x)$ см. ниже) в области $\Omega^-(EC_0 \cup EC_1)$;
4. на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x \in I/\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы

5.

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x)\ , \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi(x)\ , \qquad -1 \leqslant x \leqslant (c-1)/2; \tag{4}$$

$$u(p(x),0) = \mu\, u(x,0) + f(x)\ , -1 \leqslant x \leqslant c, \tag{5}$$

где $f(x) \in C[-1\,,\,c] \cap C^{1,\alpha}(-1,c)$, $\psi(x) \in C[-1\,,\,(c-1)/2] \cap C^{1,\alpha}(-1,\,(c-1)/2)$, $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$, причем $\varphi(x) = (1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$, $f(-1) = 0$, $\varphi(-1) = 0$.

Условие (4) является аналогом условия Франкля [1].

Имеет место следующий принцип экстремума: решение задачи $TF$ при выполнении условия $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, своего положительного максимума и отрицательного минимума достигает на $\sigma_0$. Из принципа экстремума следует единственность решения задачи $TF$.

Существование решения задачи $TF$ докажем в случае $c=0$. В силу формул Даламбера [3, с. 39], дающих в области $\Omega^-$ решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x)\ ,\ x\in\overline{I};\quad \lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I, \tag{6}$$

где $I=(-1,1)$ — интервал оси $y=0$, и решение видоизмененной задачи $N$ [3, с. 143] с краевыми условиями

$$u|_{\sigma_0}=\varphi(x)\ ,\ x\in\overline{I}\ ;\ \lim_{y\to+0}y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x)\ ,\ x\in I, \tag{7}$$

согласно условиям (3)–(5) задача $TF$ эквивалентно сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)dt=F_2(x)\ ,\quad x\in(-1,0), \tag{8}$$

где

$$F_2(x)=-\frac{1+\mu^2}{2\mu}\int_{-1}^{0}\frac{\nu(t)dt}{x+t}+R[\nu]+F_1(x)\ ,\quad x\in I, \tag{9}$$

$R[\nu]$ — регулярный оператор. Заметим, что $\nu(-x)+\mu\nu(x)=-\psi'\left(-\frac{1+x}{2}\right)+\mu\psi'\left(\frac{x-1}{2}\right)-f'(x)$, $x\in(-1,0)$.

Применяя метод регуляризации Карлемана – Векуа [4] к уравнению (8), преобразуем его к виду

$$\nu(x)=-\frac{1+\mu^2}{2\mu\pi^2}\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{-s}{-x}}\,\frac{\nu(s)}{s+x}ds+R_2[\nu]+F_2(x), \tag{10}$$

где $R_2[\nu]$ — регулярный оператор. Из (10), вводя новые переменные $s=-e^{-t}$ , $x=-e^{-y}$ и обозначив $\rho(y)=\nu(-e^{-y})\cdot e^{-y}$, $K(x)=-(1+\mu^2)/2\mu\pi\,\mathrm{ch}(x/2)$, получим уравнение Винера-Хопфа

$$\rho(y)=\int_{0}^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_3[\rho]+F_3(y). \tag{11}$$

Так как $\widehat{K}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\,t}K(t)dt=-\frac{1+\mu^2}{2\mu\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos t\,x}{\mathrm{ch}(t/2)}dt=-\frac{1+\mu^2}{\mu}\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\,x)}$ [5, с. 468], то индекс выражения $1-\widetilde{K}(x)=1+(1+\mu^2)/(\mu\,\pi\,\mathrm{ch}(\pi\,x))$ равен нулю [6, с. 50]. Отсюда и из единственности решения задачи $TF$ вытекает однозначная разрешимость (11) , а значит и всей задачи $TF$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямим скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1996 Т. 20, № 2. С. 196–202.
2. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
3. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 234 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
6. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. Н.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 269 с.