

УДК 517.956.6

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© А. М. Нагорный *, Н. К. Мамадалиев **

** mamadaliev57@mail.ru

* Ташкентский педагогический государственный университет, Ташкент, Узбекистан;

** Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0, \quad (1)$$

где

$$L = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (-x)^m \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right], \quad -2 < m < 0.$$

Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная отрезками OA , AD , BD прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и характеристиками

$$OC : y - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : y + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения

$$Lu = 0. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1) представимо в виде [1, 2]

$$u(x, y) = z(x, y) + \omega(x), \quad (3)$$

где $z(x, y)$ является регулярным решением уравнения (2) в области D_1 , а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (2) класса R_2 [3].

Введем обозначения

$$D_1 = D \cap \{x > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x < 0\},$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & \text{при } x > 0, \\ \omega_2(x), & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

причем функция $\omega(x)$, равная $\omega_1(x)$, в области D_1 обладает всеми производными, входящими в уравнение (1), а в области D_2 представление (3) и гладкость функции $\omega(x) = \omega_2(x)$ даются определением обобщенного решения класса R_{2y} [3] уравнения (1).

ЗАДАЧА. Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$;
- 2) функция $u(x, y)$ — является регулярным решением уравнения (1) в области D_1 , а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (1) класса R_{2y} ;
- 3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$-\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}; \quad (4)$$

- 4) u_x непрерывна вплоть до линии перехода как слева, так и справа;

5) удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{OA} = \tau_1(x), \quad u|_{AD} = \psi(y), \quad u|_{BD} = \psi_1(x), \\ (u - \omega(x))|_{OC} = \psi_2(x), \quad u|_{CB} = \psi_3(x) \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau_1, \psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\tau_1(0) = \psi_2(0), \quad \tau_1(1) = \psi(0), \quad \psi(1) = \psi_1(1), \quad \psi_1(0) = \psi_3(0),$$

$$\psi_2 \left[- \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} \right] = \psi_3 \left[- \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} \right].$$

Отметим, что задача Дирихле в случае $m = 0$ исследована в работе [4], а при $-1 < m < 0$ в [5].

Без ограничения общности можно предполагать, что $\omega(0) = 0, \omega(1) = 0$. На основании (3) и (5) задача редуцируется к определению регулярного в области D_1 , обобщенного в области D_2 решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} z|_{OA} = \tau_1(x) - \omega_1(x), \quad z|_{AD} = \psi(y), \quad z|_{BD} = \psi_1(x) - \omega_1(x), \\ z|_{OC} = \psi_2(x), \quad z|_{CB} = \psi_3(x) - \omega_2(x). \end{aligned}$$

При определенных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
2. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
4. Мереев М., Базаров Д. Задача Дирихле для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 1016–1020.
5. Салахитдинов М. С., Нагорный А. М., Мамадалиев Н. К. Задача Дирихле для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа второго рода // Сб. "Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения". Ташкент: Фан, 1989. С. 3–11.